Michael Winkler
Johannes Lankeit

21. Mai 2015

6. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Welche der folgenden Gebiete im $\mathbb{R}^2$ erfüllen die äußere Kugelbedingung?

a) $B_2(0)$ *b)* $B_1(0) \setminus \{0\}$ *c)* $(0,1)^2$ *d)* $B_1(0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ oder } y < 0\}$

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $n \geq 3$ und $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ sowie $\varepsilon \in (0,1)$. Betrachte

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\frac{|x|^{2-n}-1}{\varepsilon^{2-n}-1} & |x| > \varepsilon \\ -1, & |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

und zeige, dass $u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega})$ eine subharmonische Funktion ist.
Betrachte

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

und überzeuge dich davon, dass g eine auf $\partial\Omega$ stetige Funktion definiert.
Zeige: Auf dem Gebiet Ω ist die Perron-Lösung der Laplace-Gleichung zu den Randwerten g gegeben durch $u \equiv 0$.
Sie erfüllt die Randbedingung in $x = 0$ nicht.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien $1 > \alpha > \beta > 0$. Zeige am Beispiel des Intervalls $\Omega = (0,1)$, dass Bemerkung 6.3 b), also

$$C^1(\overline{\Omega}) \subsetneq C^\alpha(\overline{\Omega}) \subsetneq C^\beta(\overline{\Omega}) \subsetneq C^0(\overline{\Omega}),$$

gilt.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei

$$v(x,y,z) = \Big[\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2} + z\ln\Big|((1-z)+\sqrt{x^2+y^2+(1-z)^2})(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\Big|\Big] - 2z\ln(x^2+y^2).$$

Diese Funktion ist harmonisch außerhalb von $\{(x,y,z); x = y = 0, 0 \leq z \leq 1\}$.
(Darin gilt $\big[\ldots\big] \to 1$ für $(x,y,z) \to 0$.)
Betrachte den Grenzwert von $v(x,y,z)$ für $(x,y,z) \to 0$, entlang der Kurve $|z|^\beta = \sqrt{x^2+y^2}$ für ein $\beta > 0$, und entlang $x^2 + y^2 = e^{-\frac{\gamma}{2z}}$ für $\gamma > 0$, $z > 0$.
Zeige: v ist unstetig in 0 und für jedes $\gamma > 0$ ist $0 \in \partial\{(x,y,z); v(x,y,z) = \gamma\}$.
Es sei $c > 0$. Definiere $\Omega = B_1(0) \cap \{(x,y,z); v(x,y,z) < 1 + c\}$.
Dann gibt es keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = v\big|_{\partial\Omega}. \tag{1}$$

Zeige dazu, dass jede Lösung von (1) mit v übereinstimmen muss: Setze $\varepsilon > 0$ und betrachte

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0).$$

Nimm an, u löse (1) und wähle $C > 0$ so, dass $|u - v| < C$ in Ω. Zeige schließlich durch Betrachtung von

$$w_\varepsilon \equiv C\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \pm (u - v),$$

dass

$$|u(x,y,z) - v(x,y,z)| \le \frac{C\varepsilon}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (x,y,z) \in \Omega_\varepsilon$$

sein müsste. Warum ist also (1) nicht durch eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ lösbar?

Hausübungen

Abgabe: 28. Mai 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < \sqrt{|x|}, x^2+y^2 < 1\}$ und $\beta \in (1,2)$. Betrachte

$$u(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) y^\beta & y > 0 \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

Zeige: $u \in C^1(\overline{\Omega})$, aber $u \notin C^\alpha(\overline{\Omega})$ für $\alpha \in (\frac{\beta}{2}, 1)$.

Hausaufgabe 2:
Beweise oder widerlege:
a) Der Schnitt,
b) die Vereinigung
zweier Gebiete, die die äußere Kugelbedingung erfüllen, erfüllt wieder die äußere Kugelbedingung.

Hausaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine strikt konvexe Menge. Zeige, dass es zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine lineare Barriere gibt.

Hausaufgabe 4:
Beweise: Jedes C^2-Gebiet im $\mathbb{R}^n$ erfüllt die äußere Kugelbedingung.
(Es genügt, für eine Funktion $\Phi\colon f \to \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = 0$ eine Kugel $B_r(re_n)$ oberhalb des Graphen zu finden. (Warum?))

Hausaufgabe 5:
Es seien $n \ge 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha > 0$. Zeige, dass dann

$$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$$

gilt, dass also jede in $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ beschränkte Folge eine in $C^k(\bar{\Omega})$ konvergente Teilfolge enthält.

Hausaufgabe 6:
Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x,y) = x^4 - 2x^2y + e^y - y$ und $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \Phi(x,y) < 42\}$. Zeige, dass das Problem

$$-\Delta u = 1 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

eine Lösung hat.