Michael Winkler
Johannes Lankeit

11. Juni 2015

8. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Untersuche die durch $u_n(x) := \sqrt{n}e^{-nx}$ sowie die durch $v_n(x) = ne^{-2nx}$ definierte Funktionenfolgen in $L^2((0,1))$ auf Beschränktheit, punktweise Konvergenz, Konvergenz im Sinne der Norm und schwache Konvergenz.

Präsenzaufgabe 2:
Es gelte $f_n \rightharpoonup f$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und es sei $p \in [1, \frac{2N}{N-2})$. Zeige, dass dann $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $u_n \rightharpoonup u$ und $v_n \rightharpoonup v$ in $L^2(\Omega)$. Beweise oder widerlege: $\langle u_n, v_n \rangle := \int_\Omega u_n v_n \to \langle u, v \rangle$.

Präsenzaufgabe 4:
Beweise oder widerlege: „Schwache Konvergenz (in L^2) impliziert punktweise Konvergenz“, „punktweise Konvergenz impliziert schwache Konvergenz (in L^2)“.

Präsenzaufgabe 5:
Seien $n \geq 1$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ mit $|x_k| \to \infty$ für $k \to \infty$. Zeige, dass durch

$$f_k(x) := (1 - |x - x_k|^2)_+, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

eine in $W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ schwach konvergente Folge definiert wird, die nicht stark in $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergiert.

Präsenzaufgabe 6:
Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ so, dass

$$f_k \to f \quad \text{fast überall in } \Omega \qquad \text{für } k \to \infty$$

sowie

$$f_k \rightharpoonup g \quad \text{in } L^2(\Omega) \qquad \text{für } k \to \infty$$

mit gewissen fast überall in Ω definierten Funktionen f und g gelten. Zeige, dass dann

$$f = g \qquad \text{fast überall in } \Omega$$

gelten muss.

Präsenzaufgabe 7:
Es gelte $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2(\Omega)$. Zeige, dass dann $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}$.

Hausübungen

Abgabe: 18. Juni 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:
Gehört die durch $u(x) := 1 - |x|, x \in (-1,1)$, definierte Funktion zu $W_0^{1,2}((-1,1))$?

Hausaufgabe 2:

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$i.)\ u_n(x) = \sin(n\pi x), \quad ii.)\ u_n(x) = \sin(n/x), \quad iii.)\ u_n(x) = \sin(1/nx).$$

Untersuche die vorgelegten Funktionenfolgen auf schwache Konvergenz in $L^2(0,1)$.

Hausaufgabe 3:

In dem beschränkten, glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien derartige Funktionen f_k gegeben, dass $f_k \rightharpoonup f$ in $L^2(\Omega)$ und es (klassische) Lösungen u_k der Randwertaufgabe

$$-\Delta u_k = f_k \text{ in } \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

gebe.
Zeige: Es gibt eine Teilfolge u_{k_l} dieser Lösungen und ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, sodass $u_{k_l} \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$.
Zeige weiter: Mit C_P aus Proposition 1.12 gilt $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
Tipp: Multipliziere zu Beginn die Gleichung mit u und integriere.

Hausaufgabe 4:

Zeige: In einem Hilbertraum gilt $x_n \to x$ genau dann, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Hausaufgabe 5:

Es sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $|u| \in W_0^{1,2}(\Omega)$?

Hausaufgabe 6:

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Für ein festes $x_\star \in \Omega$ sei ferner $\Omega_\star := \Omega \setminus \{x_\star\}$. Zeige, dass

$$W_0^{1,2}(\Omega_\star) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

im Sinne einer Gleichheit von Funktionen f. ü. in Ω gilt.

[Tipp: OBdA sei $x_\star = 0 \in \Omega$. Um zu zeigen, dass $C_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega_\star)$ gilt, sei $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $\varphi_\varepsilon := \chi_\varepsilon \cdot \varphi$ für $\varepsilon > 0$ mit χ_ε wie im Beweis von Lemma 6.1. Beweise, dass $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$ beschränkt in $W_0^{1,2}(\Omega_\star)$ ist, und wähle eine Folge von Zahlen $\varepsilon = \varepsilon_k \searrow 0$ mit $\varphi_{\varepsilon_k} \rightharpoonup z$ in $W_0^{1,2}(\Omega_\star)$ und $\varphi_{\varepsilon_k} \to z$ in $L^2(\Omega_\star)$ für $k \to \infty$. Begründe, warum $z = \varphi$ sein muss.]