Michael Winkler
Johannes Lankeit

18. Juni 2015

9. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2015

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$ nichtnegativ sowie $f \in L^2(\Omega)$. Gib eine schwache Formulierung für

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

an und weise die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung nach.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$ nichtnegativ sowie $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in C^2(\overline{\Omega})$. Gib eine schwache Formulierung für

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu &= f \\ u\big|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

an und weise die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung nach.

Präsenzaufgabe 3:
Es seien $n \geq 1$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda_1(\Omega_1)$ der zugehörige schwache erste Eigenwert von $-\Delta$ in Ω_1. Für $a > 0$ sei $\Omega_a := a\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x}{a} \in \Omega_1\}$. Bestimme den ersten schwachen Eigenwert $\lambda_1(\Omega_a)$ von $-\Delta$ in Ω_a. Wie verhält sich $\lambda_1(\Omega_a)$ für $a \to 0$ bzw. für $a \to \infty$?

Präsenzaufgabe 4:
Es seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$ bezeichne Af die schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass die dadurch definierte Abbildung $A: \ L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ linear und *vollstetig* ist, d.h., dass aus $f_k \rightharpoonup f$ in $L^2(\Omega)$ folgt, dass $Af_k \to Af$ in $L^2(\Omega)$ gilt.

Präsenzaufgabe 5:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Betrachte $V = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega); \int_\Omega v \cdot \nabla\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)\}$.
Zeige, dass es genau ein $u \in V$ gibt, sodass

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in V.$$

Ein derartiges u nennt man auch eine schwache Lösung der Stokes-Gleichung $-\Delta u + \nabla\pi = f$, $\nabla \cdot u = 0$ in Ω mit $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Worin unterscheidet sich diese Definition von Def. 2.1 für die schwachen Lösungen der Poisson-Gleichung?

Hausübungen

Abgabe: 25. Juni 2015, 14:15 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es seien $n \geq 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $a \in L^\infty(\Omega)$.
Zeige, dass

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega a u^2}{\int_\Omega u^2}, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

ein Minimum μ_1 besitzt.

Hausaufgabe 2:

Finde beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, derart, dass der schwache erste Eigenwert von $-\Delta$ in Ω kein klassischer Eigenwert ist.
Tipp: Blatt 8, Hausaufgabe 6.

Hausaufgabe 3:

Es seien Ω_1 und Ω_2 Gebiete im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, und es mögen $\lambda_1(\Omega_1)$ bzw. $\lambda_1(\Omega_2)$ die ersten schwachen Eigenwerte von $-\Delta$ in Ω_1 bzw. Ω_2 bezeichnen. Zeige, dass aus $\Omega_1 \subset \Omega_2$ stets $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2)$ folgt. Folgt sogar $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$, falls zusätzlich $\Omega_1 \neq \Omega_2$ ist?

Hausaufgabe 4:

Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und λ_1 der erste schwache Eigenwert von $-\Delta$ in Ω mit zugehöriger Eigenfunktion $\varphi_1 := \Theta \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ferner seien

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

und

$$\lambda_2 := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}, \\ \int_\Omega \varphi_1 u = 0}} J(u).$$

a) Zeige, dass es $\varphi_2 \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $\int_\Omega \varphi_1 \varphi_2 = 0$ gibt derart, dass $J(\varphi_2) = \lambda_2$ gilt.

b) Beweisee, dass φ_2 eine schwache Eigenfunktion von $-\Delta$ in Ω zum schwachen Eigenwert λ_2 ist.

c) Gilt immer $\lambda_2 > \lambda_1$?

d) Konstruiere induktiv $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ so, dass $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ für $k \in \mathbb{N}$, dass φ_k eine schwache Eigenfunktion von $-\Delta$ in Ω zum schwachen Eigenwert λ_k ist und dass außerdem $\int_\Omega \varphi_k \varphi_l = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ ist.

Hausaufgabe 5:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $A\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine messbare Abbildung derart, dass $A(x)$ symmetrisch für alle $x \in \Omega$ und dass es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit $c_2|\xi|^2 \geq \xi^T A(x)\xi \geq c_1|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \Omega$.
Gib eine schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} Lu := -\nabla \cdot (A(x)\nabla u(x)) &= f(x) \\ u\big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

an. Betrachte die assoziierte Bilinearform $B(u,v) = \int_\Omega (\nabla v)^T A \nabla u$ und zeige, dass das Funktional $u \mapsto B(u,u)$ auf der Menge $\{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \int_\Omega u^2 = 1\}$ ein Minimum λ_0 annimmt.
Zeige weiter, dass λ_0 ein (schwacher) Eigenwert von L ist und jeder zugehörige Minimierer u_0 eine Eigenfunktion.
Beweise, dass λ_0 der kleinste Eigenwert von L ist.