III. Lösung elliptischer Probleme mit Methoden der Variationsrechnung

Wir werden hier einen alternativen Ansatz kennen lernen, dessen grundlegende Idee auf einen Minimierungsprinzip basiert und weitreichende Anwendungsmöglichkeiten besitzt. Wir werden damit zunächst das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung sehr einfach lösen können – allerdings zunächst nur in einem schwächeren als dem obigen Sinn. Der Nachweis, dass deine solcherart gewonnene „schwache Lösung“ tatsächlich (unter gewissen Umständen) klassisch ist, erfordert ein i.d.R. umfangreiche Analysis („Regularitätstheorie“), die über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgeht.
Die Methode wird uns schließlich aber auch zu tatsächlich Neuem führen – nämlich der Existenz so genannter *Eigenfunktionen* des Operators $-\Delta$.

1. Der Sobolevraum $W_0^{1,2}(\Omega)$

Variationelle Ansätze sind funktionalanalytischer Natur. Wir wollen daher zu Beginn die für unser spezielles Rahmenwerk wichtigen Begriffe und Aussagen – i.W. ohne Beweise – bereitstellen.

1.1 Definition. *Sei X ein Vektorraum.*
a) Ein Innenprodukt *auf X ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ mit $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ und $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x,z\rangle$ für alle $x,y,z \in X$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sowie $\langle x,x\rangle > 0$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$.*
Mit $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x \in X$, ist dann $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, *d.h., es gelten $\|x\| \geq 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ und $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x,y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. In diesem Fall nennt man $(X, \|\cdot\|)$ einen* Innenproduktraum *– und schreibt mitunter auch $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ statt $(X, \|\cdot\|)$ –, denn die* Norm *$\|\cdot\|$ wird durch das Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ „induziert“.*

b) Ein Innenproduktraum $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Hilbertraum, *wenn er* vollständig *ist, d.h., wenn es zu jeder Cauchyfolge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ ein $x \in X$ gibt mit $x_j \to x$ in X, d.h., $\|x_j - x\| \to 0$ in $\mathbb{R}$, für $j \to \infty$.*

1.2 Beispiel. *a) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist ein Hilbertraum mit $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$.*
b) $(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2})$ mit

$$\ell^2 := \left\{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty \right\}$$

ist ein Hilbertraum mit $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,\ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}, y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *messbar. Dann ist* $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ *ein Hilbertraum mit* $\langle u, v\rangle := \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ u, v \in L^2(\Omega)$.

d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *und beschränkt. Dann ist* $(C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ *ein Innenproduktraum, aber kein Hilbertraum.*

e) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *und*

$$C_0^m(\Omega) := \Big\{ u \in C^m(\Omega) \ \Big|\ \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ ist kompakt} \Big\}$$

mit $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$. *Ferner sei das Innenprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ *auf* $C_0^1(\Omega)$ *definiert durch*

$$\langle u, v\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \qquad u, v \in C_0^1(\Omega).$$

Dann ist auch $(C_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)})$ *ein Innenproduktraum, aber kein Hilbertraum.*

1.3 Proposition. *Ist* $(X_0, \|\cdot\|_{X_0})$ *ein Innenproduktraum, so gibt es einen bis auf isometrische Isomorphie eindeutlig bestimmten Hilbertraum* $(X, \|\cdot\|_X)$ *derart, dass* $(X_0, \|\cdot\|_{X_0})$ *isometrisch isomorph du einem dichten Unterraum von* $(X, \|\cdot\|X)$ *ist. Man nennt* $(X, \|\cdot\|_X)$ *dann auch (die)* Vervollständigung *von* $(X_0, \|\cdot\|_{X_0})$ *und schreibt kurz* $X = \overline{X_0}^{\|\cdot\|_{X_0}}$.

1.4 Beispiel. *a) Es gilt* $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}^{|\cdot|}$ *mit* $|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$.

Allgemeiner ist $\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}^{\|\cdot\|_2}$ *für* $n \geq 1$.

b) Ist

$$X_0 := \Big\{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ \Big|\ \exists, j_0 \in \mathbb{N} :\ x_j = 0\ \forall\, j \geq j_0 \Big\},$$

so ist

$$\ell^2 = \overline{X_0}^{\|\cdot\|_{\ell^2}}.$$

c) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen, so gilt*

$$L^2(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} = \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}}.$$

1.5 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann wird der* Sobolevraum $W_0^{1,2}(\Omega)$ *definiert als die Vervollständigung von $C_0^1(\Omega)$ bgzl. $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$; wir setzen also*

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}}.$$

1.6 Proposition und Definition. *a) Es gilt $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$; es gibt also eine* Einbettung*, d.h., eine injektive, stetige lineare Abbildung $\iota : W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit*

$$\sup_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\|\iota u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}} < \infty.$$

Wir dürfen – und werden – die Elemente von $W_0^{1,2}(\Omega)$ insbesondere also als Funktionen aus $L^2(\Omega)$ auffassen.

b) Ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so besitzt u eine schwache Ableitung *aus $L^2(\Omega)$: Es existiert eine Funktion $Du \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ derart, dass*

$$\int_\Omega u \nabla \varphi = -\int_\Omega Du \cdot \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt. Statt Du schreiben wir im Folgenden ∇u, weisen aber darauf hin, dass es sich hier keineswegs um eine punktweise existente Ableitung im klassischen Sinn handeln muss.

c) Ist $\partial\Omega$ glatt und liegt u sowohl in $W_0^{1,2}(\Omega)$ als auch in $C^0(\bar{\Omega})$, so ist notwendig $u|_{\partial\Omega} = 0$.

d) Ist $\partial\Omega$ glatt und ist $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = 0$ und $\int_\Omega |\nabla u|^2 < \infty$, so ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, und schwache und klassische Ableitung stimmen überein.

e) Ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $\psi(0) = 0$, so ist $\psi \circ u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, und es gilt $\nabla \psi(u)(x) = \psi'(u(x)) \nabla u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Eine wichtige Kompaktheitseigenschaft in allgemeinen Hilberträumen wird für uns im Fall des Raumes $W_0^{1,2}(\Omega)$ von erheblichem Interesse sein. Zu ihrer Formulierung führen wir ein verallgemeinertes Konzept von Konvergenz ein.

1.7 Definition. *Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum und $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge, für die es $x \in X$ gibt derart, dass für jedes $y \in X$*

$$\langle x_j, y \rangle \to \langle x, y \rangle \qquad \text{für } j \to \infty$$

gilt. Dann heißt $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent *gegen* x*; in Zeichen:*

$$x_j \rightharpoonup x \quad (\textit{in } X) \qquad \textit{für } j \to \infty.$$

1.8 Proposition. *a) Aus* $x_j \to x$ *in* X *(also* $\|x_j - x\| \to 0$ *in* $\mathbb{R}$*) folgt* $x_j \rightharpoonup x$*, aber nicht umgekehrt.*

b) Aus $x_j \rightharpoonup x$ *und* $x_j \rightharpoonup \tilde{x}$ *folgt* $x = \tilde{x}$.

c) Aus $x_j \rightharpoonup x$ *folgt*

$$\|x\| \le \liminf_{j\to\infty} \|x_j\|.$$

d) Aus $x_j \rightharpoonup x$ *folgt, dass* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *beschränkt sein muss.*

1.9 Satz. *Seien* $(X, \|\cdot\|)$ *ein Hilbertraum und* $M \subset X$ *beschränkt und abgeschlossen. Dann ist* M schwach folgenkompakt*, d.h., zu jeder Folge* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ *gibt es eine Teilfolge* $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *und ein* $x \in M$ *derart, dass*

$$x_{j_k} \rightharpoonup x \qquad \textit{für } k \to \infty$$

gilt.

1.10 Bemerkung. *Ist* $\dim X = \infty$*, so ist die beschränkte und abgeschlossene Einheitskugel* $\overline{B}_1(0) = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ *nicht kompakt im Sinne „starker" (also Norm-)Konvergenz.*

Über die für alle Hilberträume gültige Aussage in 1.9 hinaus hat $W_0^{1,2}(\Omega)$ weitere nützliche Eigenschaften:

1.11 Satz (Sobolev-Einbettungssatz). *Seien* $n \ge 1$ *und* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt.*

a) Ist $n = 1$*, so gilt*

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(\bar{\Omega});$$

alle Elemente aus $W_0^{1,2}(\Omega)$ *dürfen also als (sogar Hölder-)stetige Funktionen auf* $\bar{\Omega}$ *aufgefasst werden, und es gibt* $C > 0$ *mit*

$$\|u\|_{C^{\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})} \le C\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \qquad \textit{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

b) Sind $n \geq 2$ und $p \geq 1$ so, dass

$$\begin{cases} p < \infty, & \textit{falls } n = 2, \\ p \leq \frac{2n}{n-2}, & \textit{falls } n \geq 3, \end{cases}$$

so gilt

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega);$$

insbesondere existiert $C > 0$ mit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \qquad \textit{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

c) Sind $n = 1$ und $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, so gilt

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

(in Worten: $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist kompakt eingebettet *in $C^\alpha(\bar{\Omega})$); jede beschränkte Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ enthält also eine in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ (stark) konvergente Teilfolge.*

d) Sind $n \geq 2$ und

$$p < \frac{2n}{n-2},$$

so haben wir entsprechend

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Als letzte Vorbereitung beweisen wir die wichtige

1.12 Proposition (Poincaré-Ungleichung). *Seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gibt es $C_P > 0$ derart, dass*

$$\int_\Omega u^2 \leq C_P \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \textit{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Nach Translation dürfen wir annehmen, dass $\Omega \subset \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \in (0, a)\}$ für ein $a > 0$ gilt.

Behauptung 1: Es gilt

$$\int_\Omega \varphi^2 \leq a^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Um dies einzusehen, beachten wir, dass nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für jedes solche φ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x', x_n) &= \left\{\varphi(x', 0) + \int_0^{x_n} \partial_{x_n}\varphi(x', s)ds\right\}^2 \\
&\leq \left\{\int_0^{x_n} 1ds\right\} \cdot \left\{\int_0^{x_n} \Big|\partial_{x_n}\varphi(x', s)\Big|^2 ds\right\} \\
&\leq a\int_0^a \Big|\partial_{x_n}\varphi(x', s)\Big|^2 ds \qquad \text{für alle } x = (x', x_n) \in \Omega,
\end{aligned}$$

wobei wir φ trivial auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt haben. Integration hierin ergibt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi^2(x', x_n)dx &\leq \int_0^a \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a \int_0^a \Big|\partial_{x_n}\varphi(x', s)\Big|^2 ds dx' dx_n \\
&= a\int_0^a \left\{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^a \Big|\partial_{x_n}\varphi(x', s)\Big|^2 ds dx'\right\} dx_n \\
&\leq a^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2,
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Behauptung 2: Es gilt (1) mit $C_P := a^2$.

Zu gegebenem $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nehmen wir dazu gemäß 1.5 eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^1(\Omega)$ mit $\varphi_j \to u$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ für $j \to \infty$, so dass insbesondere $\varphi_j \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $\nabla\varphi_j \to \nabla u$ in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ für $j \to \infty$ gelten. Mit Behauptung 1 haben wir also

$$\int_\Omega u^2 \leftarrow \int_\Omega \varphi_j^2 \leq a^2 \int_\Omega |\nabla\varphi_j|^2 \to a^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \text{für } j \to \infty,$$

was den Beweis abschließt.