Michael Winkler
Johannes Lankeit

20. Juni 2016

10. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

a) Zeige, dass für jedes $\gamma > 0$ das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u = e^{-\gamma u^2} & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

genau eine klassische Lösung $u = u_\gamma$ besitzt, und dass diese positiv in Ω ist.

b) Bestimme

$$\lim_{\gamma \searrow 0} u_\gamma(x) \quad \text{sowie} \quad \lim_{\gamma \nearrow \infty} u_\gamma(x) \qquad \text{für alle } x \in \Omega.$$

[Tipp: Zeige, dass es $\alpha \in (0,1)$ und $C > 0$ mit $\|u_\gamma\|_{C^{2+\alpha}(\bar\Omega)} \leq C$ für alle $\gamma \in (0,1)$ gibt, und verwende den Satz von Arzelà-Ascoli.
Für $\gamma \to \infty$ arbeite stattdessen mit einer Schranke in $C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$.]

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes beschränktes Gebiet. Zeige, dass das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases}$$

eine klassische Lösung hat. Ist sie eindeutig?

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega = B_2(0) \subset \mathbb{R}^3$. Zeige, dass für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 + \frac{1}{1+\gamma^2 u} & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

eine Lösung u_γ hat.
Weise nach, dass es eine Folge $\gamma_k \to \infty$ gibt, sodass u_{γ_k} für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Hausübungen

Abgabe: 27. Juni 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Betrachtet seien die Randwertprobleme

$$\begin{cases} -\Delta u = \cos(ku) & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \qquad (\star)$$

für $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ genau eine klassische Lösung u_k von $(\star)$ gibt, die

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\pi}{2k}$$

erfüllt, und dass für diese Lösung sogar $0 < u_k(x) \leq \frac{\pi}{2k}$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

b) Zeige, dass $u_k \to 0$ in $C^1(\bar{\Omega})$ für $k \to \infty$ gilt, dass aber $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht in $C^2(\bar{\Omega})$ konvergent ist.

Hausaufgabe 2:
Beweise Satz 4.4: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. a) Erfüllt $f \in L^q(\Omega)$ für ein $q > 1$ mit $q > \frac{2n}{n+2}$, so hat

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) & \text{in } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

genau eine schwache Lösung.
b) Sind $\partial\Omega$ glatt und $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ für ein $\alpha \in (0,1)$, so hat das Problem genau eine klassische Lösung $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.