Michael Winkler
Johannes Lankeit

27. Juni 2016

11. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen" im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $u_0(-x) = u_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Lösung u von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

aus Satz 1.2.1 für alle positiven Zeiten t ebenfalls $u(x,t) = u(-x,t)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ monoton. Zeige, dass dann auch die zugehörige Lösung der Wärmeleitungsgleichung aus Satz 1.2.1 in jedem $t > 0$ monoton bezüglich x ist.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ unstetig. Wir setzen

$$u(x,t) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t) u_0(y) \, \mathrm{d}y, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u_0(x), & x \in \mathbb{R}, t = 0. \end{cases}$$

a) Zeige: Dann ist u keine klassische Lösung des Cauchy-Problems der Wärmeleitungsgleichung im Sinne der Definition in Satz 1.2.1.
b) Zeige: Es gilt trotzdem $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ (und insbesondere existieren diese Ableitungen).
c) Gib eine „Lösung" der Wärmeleitungsgleichung zu Anfangsdaten $u_0 = \chi_{[-1,1]}$ an.
d) An welchen Stellen ist die in c) gefundene Lösung stetig?
e) Untersuche zudem ihr Langzeitverhalten.

Hausübungen

Abgabe: 11. Juli 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:
Es sei $a > 0$. Zu $\lambda > \lambda_1$ betrachte je eine nichttriviale Lösung u_λ von

$$-\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda - a u_\lambda^2, \qquad u_\lambda\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Bestimme $\lim_{\lambda \searrow \lambda_1} u_\lambda$.

Hausaufgabe 2:
Die Funktion $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei punktsymmetrisch um den Ursprung, d.h. $u_0(x) = -u_0(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Lösung u der Wärmeleitungsgleichung zu diesen Anfangsdaten aus Satz 1.2.1 diese Symmetrieeigenschaft erhält, dass also $u(\cdot, t)$ für alle $t > 0$ ebenfalls punktsymmetrisch um den Ursprung ist.

Hausaufgabe 3:
Nutze den selbstähnlichen Ansatz

$$u(x,t) = t^{-\alpha} f(t^{-\beta}|x|), \qquad t > 0, t^{-\beta}|x| \leq R,$$

für ein $R > 0$, um für $m > 1$ eine nicht stationäre Lösung der Gleichung

$$u_t = \Delta u^m$$

zu finden.
Tipp: Nutze neben dem Vorgehen aus der Vorlesung die Forderung, dass $(0,\infty) \ni t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\ \mathrm{d}x$ konstant sein möge, um einen Zusammenhang zwischen α und β herzustellen.
Tipp: Um $\frac{1}{r^{n-1}}(r^{n-1}(f^m)')' + \beta r f' + \beta n f = 0$ zu lösen, könnte sich die Gleichheit $\beta r f' + n\beta f = \frac{\beta}{r^{n-1}}(r^n f)'$ als hilfreich erweisen.

Hausaufgabe 4:
Zeige, dass Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}$$

nicht eindeutig sind.
Betrachte dazu

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass $g^{(k)}(t) = P_k(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t^2}}$ mit $P_k(x) = \sum_{l=0}^{k} a_{kl} x^{k+2l}$, worin $a_{00} = 1$ und $|a_{kl}| \leq 5^k k^{k-l}$ für $k \geq l \geq 0, k \geq 1$.

Hausaufgabe 5:
Satz 1. *Die Funktion $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ habe kompakten Träger. Dann gilt für*

$$u(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y, t-s) f(y,s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s,$$

dass $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ und $u_t - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ sowie $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Zeige, dass

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) f(x-y, t-s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s$$

und

$$u_t(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) f_t(x-y,t-s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f(x-y,0)\ \mathrm{d}y.$$

Berechne auch $u_{x_i x_j}$.
Begründe die Rechenschritte in

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) \left[(\partial_t - \Delta_x) f(x-y,t-s)\right]\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f(x-y,0)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s) \left[(-\partial_s - \Delta_y) f(x-y,t-s)\right]\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} G(y,s)(-\partial_s - \Delta_y) f(x-y,t-s)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} G(y,t) f(x-y,0)\ \mathrm{d}y \\ &=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K. \end{aligned}$$

Weise nach, dass $J_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ und nutze partielle Integration und Eigenschaften von G, um

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} G(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\ \mathrm{d}y - K$$

zu zeigen.
Vollende den Beweis des oben angegebenen Satzes.