Michael Winkler
Johannes Lankeit

11. Juli 2016

# 12. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

**Präsenzaufgabe 1:**
Betrachte im glatten beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u - u^3 \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases}$$

für ein $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$. Zeige, dass die Lösungen global und beschränkt sind. Zeige, dass $u \leq 0$, sofern $u_0 \leq 0$.

**Präsenzaufgabe 2:**
Die Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ erfülle

$$u_t = \Delta u + \sqrt{|u|}, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

mit $u(\cdot, 0) \geq 0$ in $\Omega$. Zeige, dass $u$ nichtnegativ ist.

**Präsenzaufgabe 3:**
Es sei $\lambda > \lambda_1$. Zeige: Ist $f = \varphi_k$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert $\lambda_k > \lambda_1$ und ist $\widetilde{u}_0 := \varphi_k$, so ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die die Lösung $u$ von

$$u_t = \Delta u + \lambda u + f(x), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = c\widetilde{u}_0$$

global und beschränkt.

**Präsenzaufgabe 4:**
Zeige:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda_1 u + \frac{u}{t} \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

wird sowohl von 0 als auch von $t\theta$ gelöst. Warum widerspricht das nicht dem Vergleichssatz?

## Hausübungen

Abgabe: 18. Juli 2016, 9:10 Uhr

**Hausaufgabe 1:**
Beweise Proposition 6.1: Es seien $\omega > 0$, $\varphi$ eine EF von $-\Delta$ und $f(x,t,u) := \sin(\pi t) \cdot \varphi(x), (x,t,u) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann gibt es $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ derart, dass die zugehörige Lösung $u$ von (6.1) eine zeitlich nicht konstante Funktion mit $u(x, t + \frac{2\pi}{\omega}) = u(x,t)$ für alle $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$ ist.
Suche dazu eine Lösung der Form $u(x,t) = y(t)\varphi(x)$.

**Hausaufgabe 2:**
Es sei $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = a$, $\lim_{x\to\infty} u_0(x) = b$. Beschreibe das Langzeitverhalten von

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t) u_0(y) \, \mathrm{d}y.$$

**Hausaufgabe 3:**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattes Gebiet, $p > 1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Anfangsdaten $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mögen

$$u_0 \geq 0 \text{ und } \int_\Omega u_0 > c := (\max\{0, \lambda_1 - \lambda\})^{\frac{1}{p-1}}$$

erfüllen. Zeige, dass die Lösung von

$$u_t = \Delta u + \lambda u + |u|^{p-1}u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

nicht global existiert.
Tipp: Leite eine Differentialungleichung für $y(t) := \int_\Omega u(t)\theta$ her.

**Hausaufgabe 4:**

Beweise: Es gibt eine glatte Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(u) > 0$ für $u > 0$ derart, dass
i) alle Lösungen von $U' = f(U)$, $U(0) = U_0 > 0$ in endlicher Zeit explodieren,
ii) alle Lösungen von $u_t = \Delta u + f(u), u\big|_{\partial\Omega} = 0, u(\cdot, 0) = u_0$ mit $0 \leq u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ in einem beschränkten glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für alle Zeiten $t > 0$ existieren und beschränkt bleiben.
Gehe dazu wie folgt vor:
a) Zeige, dass Lösungen von $U' = f(U)$ genau dann in endlicher Zeit explodieren, wenn $\int^\infty f(u)du < \infty$.
b) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge mit $a_1 > 1$ und $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$. Dann gibt es eine $C^\infty$-Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(u) > 0$ für $u > 0$ und eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$a_k < b_k < a_{k+1}, \qquad \int_1^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty, \qquad \int_{a_k}^{b_k} \frac{du}{\sqrt{F(b_k) - F(u)}} \geq k$$

für $k \in \mathbb{N}$, worin $F' = f$.
Es sei $g \in C^1([0,\infty);[0,\infty))$ so, dass $g(u) > 0$ für $u > 0$ und $g(u) \geq 1$ für $u > 1$ sowie $\int_1^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty$ und $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positive Folge mit $\sum_k \beta_k < \infty$, $\beta_k < k^2$, $2\beta_k^2 g(a_k)k^{-2} < a_{k+1} - a_k$. Ferner setzen wir $\gamma_k := 1 - \beta_k k^{-2} > 0$ und $b_k := a_k + \beta_k^2 g(a_k)k^{-2} < a_{k+1}$. Mit später festzulegenden $c_k$, $d_k$ (mit $a_k < b_k < c_k < a_{k+1}$, $d_k > 0$) setzen wir

$$\widetilde{g}(u) = \begin{cases} d_k + \frac{g(a_k)-d_k}{(b_k-a_k)^{\gamma_k}}(b_k - u)^{\gamma_k}, & a_k \leq u \leq b_k \\ d_k + \frac{g(c_k)-d_k}{c_k-b_k}(u - b_k), & b_k \leq u \leq c_k \\ g(u) & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\widetilde{G}(u) = d_k(u - b_k) - \frac{g(a_k) - d_k}{(\gamma_k + 1)(b_k - a_k)^{\gamma_k}}(b_k - u)^{\gamma_k+1}, \quad u \in [a_k, b_k].$$

Zeige, dass dann $\widetilde{G}' = \widetilde{g}$ in $(a_k, b_k)$ und dass eine hinreichend kleine Wahl von $d_k \in (0, \frac{1}{2})$

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{du}{\sqrt{\widetilde{G}(b_k) - \widetilde{G}(u)}} \geq k$$

sicherstellt. Zeige weiter, dass $\int_{a_k}^{b_k} \frac{du}{\widetilde{g}(u)} \leq \frac{g(a_k)\beta_k}{g(a_k)-d_k} \leq 2\beta_k$ und $\int_{b_k}^{c_k} \frac{du}{\widetilde{g}(u)} \leq \beta_k$, falls $c_k \in (b_k, a_{k+1})$ nah genug an $b_k$ gewählt ist. Wähle dann eine $C^\infty$-Funktion $f$, die $\frac{1}{2}\widetilde{g}(u) \leq f(u) \leq \widetilde{g}(u)$ erfüllt, und zeige, dass sie die in der Aussage geforderten Eigenschaften hat.
c) Es sei $f$ wie in b) und $L > 0$. Für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ existiert dann eine Lösung von

$$(u_k)_{xx} + f(u_k) = 0, \quad x \in (-L, L), \quad (u_k)_x(0) = 0, \quad u_k(x) \geq a_k, \quad x \in (-L, L) \tag{1}$$

d) Beweise den Satz. Tipp für ii): Verwende eine Oberlösung der Form $\overline{u}(x_1, ..., x_n) = u_k(x_1)$.