Michael Winkler
Johannes Lankeit

11. April 2016

1. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Finde mehrere verschiedene Lösungen für

$$-\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Finde eine Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

worin

a) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 0$,

b) $n = 1$ und $f(x) = 1$,

c) $n = 1$ und $f(x) = x^2$,

d) $n = 1$ und $f \in C^0((-1,1))$,

e) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 1$,

f) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = |x|^2$,

g) $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = 2 + 3|x|^2$,

h) $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^0(\overline{\Omega})$ radialsymmetrisch.

(Tipp: Zeige, dass für radialsymmetrische Funktionen u der Laplaceoperator als $\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = r^{1-n}(r^{n-1}u_r)_r$ geschrieben werden kann.)

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ löse

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

mit einer nichtnegativen Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega})$.
Zeige in Spezialfällen – zunächst für $n = 1$, dann für $n \in \mathbb{N}$ und radialsymmetrisches f –, dass dann $u \geq 0$ ist.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Finde alle Funktionen $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, die

$$\begin{cases} \Delta u = -|x|^4 & (x \in \Omega) \\ \partial_\nu u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

erfüllen.

Hausübungen

Abgabe: 18. April 2016, 9:10 Uhr

Wegen §6 (4) Satz 4 der Prüfungsordnung zählen die Hausübungen dieses Blattes noch nicht zum Nachweis qualifizierter Teilnahme gemäß §6 (1) und §6(4), Satz 1 bis 3, der (im Einklang mit §9 (1)) Voraussetzung für die Teilnahme an der Modulabschlussprüfung ist. Für die übrigen Hausübungen gilt: Alle Übungszettel (bis auf zwei) sind abzugeben, insgesamt müssen in den Hausübungen mindestens 20 Punkte erreicht werden.

Hausaufgabe 1:

Es bezeichne $\Phi\colon (0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ die üblichen Polarkoordinaten auf dem $\mathbb{R}^2$. Für $x = \Phi(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bezeichnen wir

$$\begin{pmatrix} r(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} := \Phi^{-1}(x).$$

Zeige:

i) Die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \partial B_1(0) \to& \mathbb{R} \\ x \mapsto& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n!\varphi(x)) \end{aligned}$$

ist stetig.

ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} u\colon \overline{B}_1(0) \to& \mathbb{R} \\ x \mapsto& \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r(x))^{n!}}{n^2} \sin(n!\varphi(x)) & \text{für } x \in \overline{B}_1(0) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig.

iii) In $B_1(0)$ gilt $\Delta u = 0$.

iv) $u\big|_{\partial B_1(0)} = g$.

v) $\|\nabla u\|^2_{L^2(B_1(0))} = \int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 d\lambda = \infty$.

In welchen der folgenden Funktionenräume liegt u?

$$C^k(\overline{B}_1(0)), C^k(B_1(0)), k \in \{0, 1, 2, \infty\},\ L^p(B_1(0)), p \in [1, \infty]$$

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir definieren die Kelvin-Transformation $\Phi\colon \Omega \to \Omega, \Phi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.
Zeige: Φ ist ein globaler C^∞-Diffeomorphismus.
Zeige: Falls $\Delta u = 0$, so erfüllt auch $v = r^{2-n} \cdot (u \circ \Phi)$ diese Gleichung.

Hausaufgabe 3:

Finde alle stetig differenzierbaren Funktionen $u\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$x u_x(x, y) = y u_y(x, y), \qquad (x, y) \in (0,\infty)^2,$$

und $u(x, x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften?
Tipp: Die Richtungsableitungen von u in welche Richtung sind im Punkt (x, y) gleich null? Entlang welcher Kurven ist also u konstant?