

## 2. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

### Präsenzaufgabe 1:

Für welche Funktionen  $f, g$  löst  $u(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2$  das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

für  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ?

### Präsenzaufgabe 2:

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Finde alle radialsymmetrischen Lösungen zu  $\Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

### Präsenzaufgabe 3:

Verfolge einen Produktansatz, um möglichst viele harmonische Funktionen  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  zu konstruieren.

### Präsenzaufgabe 4:

Finde mit Hilfe eines Produktansatzes Lösungen zu  $u_t = -u_x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

### Präsenzaufgabe 5:

Gib polynomiale Lösungen bis zu dritten Grades von  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , an.

### Präsenzaufgabe 6:

Es seien  $R > 0$  und  $\rho \in (0, R)$  sowie  $\Omega := B_R(0) \setminus \bar{B}_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

Bestimme eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

worin

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| = R, \\ 1, & \text{falls } |x| = \rho, \end{cases}$$

sei.

## Hausübungen

Abgabe: 25. April 2016, 9:10 Uhr

### Hausaufgabe 1:

Es seien  $A > 0$  und  $B > 0$ . Finde mithilfe eines Produktansatzes eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega := (0, A) \times (0, B), \\ u(x, 0) = u(x, B) = 0 & \forall x \in [0, A], \\ u(0, y) = 0, \quad u(A, y) = \sin \frac{\pi y}{B} & \forall y \in [0, B]. \end{cases}$$

### Hausaufgabe 2:

- a) Formuliere und beweise ein Analogon zu Proposition 1.2 für den Fall  $n = 2$ .
- b) Es gelte  $n \geq 3$ , und  $f \in C^0([0, R])$  sei nichtnegativ mit  $f \not\equiv 0$ . Es sei  $u$  diejenige durch Proposition 1.2 gegebene Lösung der entsprechenden Poisson-Gleichung in  $B_R(0)$ , die  $u|_{\partial B_R(0)} = 0$  erfüllt. Zeige, dass dann bereits  $u > 0$  in ganz  $B_R(0)$  gilt.

### Hausaufgabe 3:

Finde durch einen Separationsansatz nichttriviale Lösungen der Gleichungen

- a)  $u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R};$
- b)  $u_t = -u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R};$
- c)  $u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R};$
- d)  $u_t = -uu_x, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$

### Hausaufgabe 4:

Es seien  $\theta \in (0, 2\pi)$  und  $\Omega_\theta$  der unbeschränkte Sektor im  $\mathbb{R}^2$  mit Öffnungswinkel  $\theta$  gegeben durch

$$\Omega_\theta := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \text{ mit } r > 0 \text{ und } \varphi \in (0, \theta) \right\}.$$

- a) Konstruiere harmonische Funktionen  $u$  in  $\Omega_\theta$ , die  $u = 0$  auf  $\partial\Omega_\theta \setminus \{0\}$  erfüllen, mithilfe des Produktansatzes

$$u(r, \varphi) = F(r) \cdot G(\varphi), \quad r > 0, \varphi \in (0, \theta).$$

[Tipp: Die resultierende Differentialgleichung für  $F$  ist vom Euler-Typ  $r^2 F'' + arF' + bF = 0$  mit bestimmten  $a, b \in \mathbb{R}$  und besitzt daher Lösungen der Form  $F(r) = r^\alpha$  mit geeignetem  $\alpha \in \mathbb{C}$ .]

- b) Stelle die in a) gefundenen Lösungen in den Fällen  $\theta = \pi$  und  $\theta = \frac{\pi}{2}$  explizit in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$  dar, und diskutiere das Verhalten nahe dem Ursprung.
- c) Zeige, dass für jedes  $\theta \in (0, 2\pi)$  die Aufgabe

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega_\theta, \\ u|_{\partial\Omega_\theta} = 0, \end{cases}$$

nicht eindeutig lösbar ist, also mindestens zwei klassische Lösungen in  $C^0(\bar{\Omega}_\theta) \cap C^2(\Omega_\theta)$  zulässt.

### Hausaufgabe 5:

Es seien  $R > 0$  und  $\rho \in (0, R)$  sowie  $\Omega := B_R(0) \setminus \bar{B}_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ . Bestimme eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$