

3. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:

Auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ habe die zweimal stetig differenzierbare Funktion f eine positive zweite Ableitung. Warum kann sie im Innern von I kein Maximum annehmen?

Präsenzaufgabe 2:

Die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ löse in dem beschränkten Gebiet Ω

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{in } \Omega \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit einer stetigen nichtnegativen Funktion g . Diese Funktion sei an wenigstens einer Stelle $x_0 \in \partial\Omega$ positiv. Zeige: $u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$.

Präsenzaufgabe 3:

Im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine harmonische Funktion. Zeige, dass u keine isolierte Nullstelle $x_0 \in \Omega$ haben kann.

Präsenzaufgabe 4:

Wende die Greensche Integralformel (Lemma 3.2) auf u und Δu an, um zu zeigen, dass jede Lösung $u \in C^4(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 = \partial_\nu u, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

in einem glatt berandeten beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bereits $u = 0$ erfüllt.

Präsenzaufgabe 5:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion. Zeige, dass u der Realteil einer harmonischen Funktion ist. Definiere dazu $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) = u_x(\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z) - iu_y(\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z)$ und finde eine holomorphe Stammfunktion F von f , sodass $\operatorname{Re}F = u$.

Zeige, dass es aber (auf anderen Gebieten) auch harmonische Funktionen gibt, die nicht Realteil einer holomorphen Funktion sind. (Tipp: $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$.)

Hausübungen

Abgabe: 2. Mai 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine in Ω harmonische Funktion mit $\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u$. Zeige: Es gilt $\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u$ für alle $x \in \Omega$.

Hausaufgabe 2:

Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ eine subharmonische Funktion, d.h., es gelte $-\Delta u \leq 0$ in Ω . Zeige, dass u in Ω nirgends ein (striktes) lokales Maximum annimmt.

Hausaufgabe 3:

Zeige: Zu jedem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt es $C > 0$, sodass für alle stetigen Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ jede Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

die Abschätzung

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq C(\max_{\partial\Omega} g + \max_{\Omega} f)$$

erfüllt.

Tipp: $-\Delta(u + \frac{|x|^2}{2n}\lambda) \leq 0$ für $\lambda := \max |f|$.

Hausaufgabe 4:

Gibt es eine nichtnegative Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$, die $-\Delta u = 1$ in \mathbb{R}^n erfüllt?

[Tipp: Für jede solche – unterstelltermaßen existente – Lösung u und jedes $R > 0$ gilt aufgrund des Vergleichssatzes $u \geq u_R$ in $B_R(0)$, worin u_R die explizit berechenbare Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u_R = 1 & \text{in } B_R(0), \\ u_R|_{\partial B_R(0)} = 0, \end{cases}$$

bezeichnet.]

Hausaufgabe 5:

Beweise den *Satz von Liouville* für harmonische Funktionen: Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte harmonische Funktion, so ist u konstant.

[Tipp: Zeige zunächst, dass man $\inf u = 0$ und $\sup u = M \geq 0$ annehmen darf. Wäre dann $M > 0$, so gäbe es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $u(x_1) \geq \frac{3}{4}M$ und $u(x_2) \leq \frac{1}{4}M$. Verwende die Mittelwertigenschaften von u in $B_R(x_1)$ und $B_{R+d}(x_2)$ für $R > 0$ und $d := |x_1 - x_2|$, und leite für große R einen Widerspruch her.]