Michael Winkler
Johannes Lankeit

9. Mai 2016

5. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen" im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Gegeben seien das Gebiet $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ sowie $u(x) = x^2$.
Bestimme zu $M_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M_2 = (-1, 0)$ und $M_3 = \Omega$ die harmonischen Liftungen $H_{B_i}(u)$.

Präsenzaufgabe 2:
Zeige, dass jede C^2-subharmonische Funktion (vgl. Einleitung zu Kapitel 2) auch im Sinne der Definition 5.3 subharmonisch ist.

Präsenzaufgabe 3:
Sind u, v subharmonisch und $\lambda > 0$, so sind auch $u + v$ sowie λu subharmonisch.

Präsenzaufgabe 4:
Es sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch (im Sinne von Def. 5.3).
Zeige, dass u in $x_0 \in \Omega$ allenfalls dann ein Maximum annimmt, wenn u konstant ist.

Präsenzaufgabe 5:
Zeige: Jede konvexe Funktion ist subharmonisch, aber nicht umgekehrt.

Präsenzaufgabe 6:
Welche der folgenden Gebiete im $\mathbb{R}^2$ erfüllen die äußere Kugelbedingung?

a) $B_2(0)$ *b)* $B_1(0) \setminus \{0\}$ *c)* $(0, 1)^2$ *d)* $B_1(0) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ oder } y < 0\}$

Hausübungen

Abgabe: 23. Mai 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Beweise Lemma 5.7 der Vorlesung:
Ist Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, und sind $u, v \in C^0(\bar{\Omega})$ subharmonisch in Ω, so ist auch $\max\{u, v\}$ subharmonisch.

Hausaufgabe 2:

Ist u subharmonisch und $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, nichtfallend und konvex, so ist $\Phi \circ u$ subharmonisch.

Hausaufgabe 3:

Die Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ sei sub- und superharmonisch.
Zeige: Dann gilt tatsächlich schon $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = 0$.

Hausaufgabe 4:

Beweise oder widerlege:
a) Der Schnitt,
b) die Vereinigung
zweier Gebiete, die die äußere Kugelbedingung erfüllen, erfüllt wieder die äußere Kugelbedingung.

Hausaufgabe 5:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine strikt konvexe Menge. Zeige, dass es zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine lineare Barriere gibt.

Hausaufgabe 6:

Es sei $n \geq 3$ und $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ sowie $\varepsilon \in (0, 1)$. Betrachte

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} -\frac{|x|^{2-n}-1}{\varepsilon^{2-n}-1} & |x| > \varepsilon \\ -1, & |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

und zeige, dass $u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega})$ eine subharmonische Funktion ist.
Betrachte

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

und überzeuge dich davon, dass g eine auf $\partial\Omega$ stetige Funktion definiert.
Zeige: Auf dem Gebiet Ω ist die Perron-Lösung der Laplace-Gleichung zu den Randwerten g gegeben durch $u \equiv 0$. Sie erfüllt die Randbedingung in $x = 0$ nicht.