Michael Winkler
Johannes Lankeit

23. Mai 2016

6. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Ist $\Omega = B_R(0) \setminus B_\rho(0)$ und $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ für ein $\alpha > 0$ und gilt $f = f(|x|)$, so ist für jede Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ die Lsg. u von

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u\big|_{|x|=R} = a, \quad u\big|_{|x|=\rho} = b, & \end{cases}$$

radialsymmetrisch um $x = 0$.

Präsenzaufgabe 2:
Es seien $1 > \alpha > \beta > 0$. Zeige am Beispiel des Intervalls $\Omega = (0,1)$, dass Bemerkung 6.3 b), also

$$C^1(\overline{\Omega}) \subsetneq C^\alpha(\overline{\Omega}) \subsetneq C^\beta(\overline{\Omega}) \subsetneq C^0(\overline{\Omega}),$$

gilt.

Präsenzaufgabe 3:
Ω erfülle eine äußere KB und sei achsensymmetrisch bzgl $x_n = 0$, d.h. es gelte $\Omega = \{(x', -x_n); (x', x_n) \in \Omega\}$. Außerdem sei $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ für ein $\alpha > 0$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$ und u die zugehörige klassische Lösung von (6.1). Zeige: Gelten

$$f(x', -x_n) = f(x', x_n) \qquad \forall (x', x_n) \in \Omega$$

und

$$g(x', -x_n) = g(x', x_n) \qquad \forall (x', x_n) \in \partial\Omega,$$

so folgt

$$u(x', -x_n) = u(x', x_n) \qquad \forall (x', x_n) \in \Omega.$$

Hausübungen

Abgabe: 30. Mai 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:
Seien $a > 0$ und $b > 0$ und $\Omega := (-a, a) \times (-b, b) \subset \mathbb{R}^2$. Finde möglichst viele Symmetrieeigenschaften der Lösungen von

a)
$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0; & \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^2 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0; & \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g; & \end{cases}$$

mit $g(x, y) := x^2, (x, y) \in \partial\Omega$.

Hausaufgabe 2:
Es sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < \sqrt{|x|}, x^2 + y^2 < 1\}$ und $\beta \in (1,2)$. Betrachte

$$u(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) y^\beta & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Zeige: $u \in C^1(\overline{\Omega})$, aber $u \notin C^\alpha(\overline{\Omega})$ für $\alpha \in (\frac{\beta}{2}, 1)$.

Hausaufgabe 3:
Es sei $n \geq 3$ und $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ (und $\phi(x) = 0$ für $|x| \geq 1$) mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$.
a) Gib ein Beispiel für eine solche Funktion an, die zudem radial und monoton bezüglich r ist.
b) Wir definieren nun für $\varepsilon > 0$ durch

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi(\frac{x}{\varepsilon})$$

weitere Funktionen. Zeige, dass diese Funktionen die Eigenschaften (2), (3), (4) aus dem Abschnitt „Ein Konzentrationsphänomen“ haben.
c) Sei außerdem $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ dann $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(x) dy = f(x)$ gilt.
d) Wir führen folgende Notation ein:

$$(\phi_\varepsilon \star f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

Zeige, dass $\|f - \phi_\varepsilon \star f\|_{L^p} \to 0$ für $\varepsilon \searrow 0$. (Durch Approximation mit glatten Funktionen kann man zeigen, dass, falls $f \in L^p$, $\sup_{|h|<\eta} \|f(\cdot - h) - f\|_{L^p} \to 0$ für $\eta \to 0$. Vielleicht ist das ein hilfreicher erster Schritt.)

Hausaufgabe 4:
Mit ϕ_ε wie in HA 2a) sei u_ε die Lösung von $-\Delta u_\varepsilon = \phi_\varepsilon$, $u_\varepsilon|_{\partial B_1} = 0$.
a) Zeige, dass $u_{\varepsilon_1} \geq u_{\varepsilon_2}$, falls $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.
b) Bestimme $u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon(x)$ für jedes $x \in B_1$.
c) Sei $f \in L^p$. Zeige, dass für $\varepsilon \searrow 0$ auch $u_\varepsilon \star f \to u \star f$ in L^p.
d) Bestimme die Grenzfunktion von $-\Delta(u_\varepsilon \star f)$ für $\varepsilon \searrow 0$.
e) Für $f \in C^2(\overline{B_R})$ bestimme $-\Delta(u \star f)$.