Michael Winkler
Johannes Lankeit

6. Juni 2016

8. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$ nichtnegativ sowie $f \in L^2(\Omega)$. Gib eine schwache Formulierung für

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu =& f \\ u\big|_{\partial\Omega} =& 0 \end{aligned}$$

an und weise die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung nach.

Präsenzaufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $c \in L^\infty(\Omega)$ nichtnegativ sowie $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in C^2(\overline{\Omega})$. Gib eine schwache Formulierung für

$$\begin{aligned} -\Delta u + cu =& f \\ u\big|_{\partial\Omega} =& g \end{aligned}$$

an und weise die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung nach.

Präsenzaufgabe 3:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes, glattes Gebiet und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sowie monoton fallend mit $f(0) = 0$. Weiter sei $h \in L^2(\Omega)$. Weise die Existenz einer schwachen Lösung von

$$-\Delta u = f(u) + h(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

nach.

Hausübungen

Abgabe: 13. Juni 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes, glattes Gebiet und $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N\times N})$ symmetrisch und erfülle mit einem $\lambda > 0$ für fast alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^N$, dass $\xi^T A(x)\xi \geq \lambda|\xi|^2$. Weiter sei $f \in L^2(\Omega)$. Finde mit variationellem Vorgehen eine Lösung zu

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Hausaufgabe 2:

Es seien $n \geq 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $a \in L^\infty(\Omega)$.
Zeige, dass

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega au^2}{\int_\Omega u^2}, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

ein Minimum μ_1 besitzt.

Hausaufgabe 3:

Es sei $N \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Weiter sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine sehr schwache Lösung der Laplace-Gleichung, in dem Sinne, dass

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0 \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nimm an, dass $u \in C(\Omega)$.[1] Zeige, dass dann $u \in C^\infty(\Omega)$.
Skizze: Es sei $B_R(x) \subset\subset \Omega$' Zeige, dass jede Funktion $\psi \in C_0^\infty((\varepsilon, R))$, die $\int_\varepsilon^R \psi = 0$ erfüllt, als

$$\psi(r) = \frac{d}{dr}(r^{N-1}\zeta'(r))$$

mit einem $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ so, dass $\zeta = \text{const}$ auf $(0, \varepsilon]$ und $\zeta = 0$ auf $[R, \infty)$ dargestellt werden kann.
Zeige, dass mit

$$w(r) := r^{1-N} \int_{\partial B_r(x)} u$$

bereits

$$\int_\varepsilon^R w(r)\psi(r)\ \mathrm{dr} = 0$$

gilt.
Folgere: $w(r) = \omega_n C(x)$ für alle $r \in (0, R)$.
Integriere $r^{N-1}w(r)$, um $C(x)$ zu bestimmen. Weise schließlich nach, dass u die Mittelwerteigenschaft hat, und vollende den Beweis.
Hinweis: Nutze bei Bedarf folgendes Lemma: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\int_\Omega u\phi = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega \phi = 0$. Dann ist $u = \mathit{const}$ (f.ü.).

Hausaufgabe 4:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $p \in (2, \frac{2n}{n-2})$. Zeige, dass das Funktional

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

nicht nach unten beschränkt ist.
Setze $\beta > 0$ fest und zeige, dass es auf der Menge $\Sigma_\beta = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \int_\Omega |u|^p = \beta\}$ ein Minimum annimmt. Für welche Gleichung ist der Minimierer eine schwache Lösung?
Tipp: Ist u ein Minimierer, so hat $\gamma(s) := \|\beta^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |u + s\phi|^p)^{-\frac{1}{p}} \cdot (u + s\phi)\|$ ein Minimum in 0. (Warum?)

[1] Tatsächlich ist das nicht erforderlich; es vermeidet aber im Beweis ein paar technische Überlegungen, die sonst nötig würden.