

9. Übung zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“ im SS 2016

Präsenzaufgabe 1:

Es seien $n \geq 1$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda_1(\Omega_1)$ der zugehörige schwache erste Eigenwert von $-\Delta$ in Ω_1 . Für $a > 0$ sei $\Omega_a := a\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x}{a} \in \Omega_1\}$. Bestimme den ersten schwachen Eigenwert $\lambda_1(\Omega_a)$ von $-\Delta$ in Ω_a . Wie verhält sich $\lambda_1(\Omega_a)$ für $a \rightarrow 0$ bzw. für $a \rightarrow \infty$?

Präsenzaufgabe 2:

Seien $n \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Es bezeichne $\lambda_1 := \min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} J(u)$, $J(u) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$, den ersten Eigenwert von $-\Delta$ in Ω und $\Theta \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ eine zugehörige nichtnegative Eigenfunktion mit $\int_{\Omega} \Theta^2 = 1$. Zeige:

- Ist u eine nichtnegative schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 , so ist u auch eine klassische Eigenfunktion, und es gilt $u > 0$ in Ω .
- Ist u eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 mit $\int_{\Omega} u^2 = 1$ und $u \not\equiv \Theta$, so gilt $J(\Theta - u) = \lambda_1$.
- Ist u wie in b), so ist $(\Theta - u)_+$ eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 .
- Ist u eine schwache Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 , so gibt es $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $u = \beta\Theta$. In diesem Sinne ist also λ_1 ein „einfacher Eigenwert“ von $-\Delta$.

Präsenzaufgabe 3:

Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ und $a \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Das Funktional

$$J(u) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} au^2}{\int_{\Omega} u^2}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

besitzt (einer früheren Aufgabe zufolge) ein Minimum μ_1 .

- Beweise, dass jeder zugehörige „Minimierer“ von J , also jede Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $J(u) = \mu_1$, zu $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ gehört.
- Identifiziere eine partielle Differentialgleichung, die jeder Minimierer von J erfüllt.
- Formuliere eine hinreichende Bedingung an a , die die Existenz eines Minimierers u von J mit $u > 0$ in Ω sicherstellt.

Hausübungen

Abgabe: 20. Juni 2016, 9:10 Uhr

Hausaufgabe 1:

Es seien $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und λ_1 der erste schwache Eigenwert von $-\Delta$ in Ω mit zugehöriger Eigenfunktion $\varphi_1 := \Theta \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ferner seien

$$J(u) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2}, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\},$$

und

$$\lambda_2 := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}, \\ \int_{\Omega} \varphi_1 u = 0}} J(u).$$

- Zeige, dass es $\varphi_2 \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 = 0$ gibt derart, dass $J(\varphi_2) = \lambda_2$ gilt.
- Beweise, dass φ_2 eine schwache Eigenfunktion von $-\Delta$ in Ω zum schwachen Eigenwert λ_2 ist.
- Gilt immer $\lambda_2 > \lambda_1$?
- Konstruiere induktiv $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ so, dass $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ für $k \in \mathbb{N}$, dass φ_k eine schwache Eigenfunktion von $-\Delta$ in Ω zum schwachen Eigenwert λ_k ist und dass außerdem $\int_{\Omega} \varphi_k \varphi_l = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ ist.
- Weise nach, dass die Folge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.
- Nimm an, Ω sei glatt. Handelt es sich bei den Funktionen u_k dann um klassische Eigenfunktionen?

Hausaufgabe 2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine messbare Abbildung derart, dass $A(x)$ symmetrisch für alle $x \in \Omega$ und dass es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit $c_2 |\xi|^2 \geq \xi^T A(x) \xi \geq c_1 |\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \Omega$.

Gib eine schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} Lu &:= -\nabla \cdot (A(x) \nabla u(x)) = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

an. Betrachte die assoziierte Bilinearform $B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v)^T A \nabla u$ und zeige, dass das Funktional $u \mapsto B(u, u)$ auf der Menge $\{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \int_{\Omega} u^2 = 1\}$ ein Minimum λ_0 annimmt.

Zeige weiter, dass λ_0 ein (schwacher) Eigenwert von L ist und jeder zugehörige Minimierer u_0 eine Eigenfunktion. Beweise, dass λ_0 der kleinste Eigenwert von L ist.

Hausaufgabe 3:

Finde beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, derart, dass der schwache erste Eigenwert von $-\Delta$ in Ω kein klassischer Eigenwert ist.

Tipp: Blatt 7, Hausaufgabe 6.

Hausaufgabe 4:

Es seien Ω_1 und Ω_2 Gebiete im \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, und es mögen $\lambda_1(\Omega_1)$ bzw. $\lambda_1(\Omega_2)$ die ersten schwachen Eigenwerte von $-\Delta$ in Ω_1 bzw. Ω_2 bezeichnen. Zeige, dass aus $\Omega_1 \subset \Omega_2$ stets $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2)$ folgt. Folgt sogar $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2)$, falls zusätzlich $\Omega_1 \neq \Omega_2$ ist?