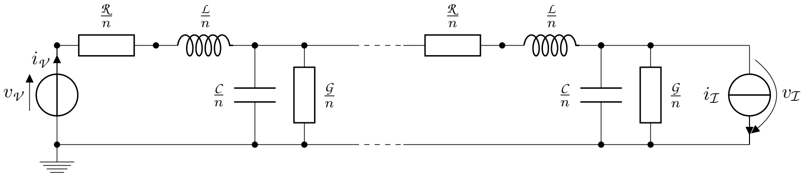
Funnel-Regelung für elektrische Schaltkreise

Thomas Berger, Timo Reis

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Elgersburg, 5. März 2014

Beispiel: RLC-Kettenglied



$$u = \begin{pmatrix} i_{\mathcal{I}} \\ v_{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{array}} \longrightarrow y = \begin{pmatrix} -v_{\mathcal{I}} \\ -i_{\mathcal{V}} \end{pmatrix}$$

$$E = E^\top \geq 0, \quad A + A^\top \geq 0, \quad B = C^\top$$

MNA-Modell

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

$$sE - A = \begin{bmatrix} s\mathrm{A}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}\mathrm{A}_{\mathcal{C}}^\top + \mathrm{A}_{\mathcal{R}}\mathcal{G}\mathrm{A}_{\mathcal{R}}^\top & \mathrm{A}_{\mathcal{L}} & \mathrm{A}_{\mathcal{V}} \\ -\mathrm{A}_{\mathcal{L}}^\top & s\mathcal{L} & 0 \\ -\mathrm{A}_{\mathcal{V}}^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = C^\top = \begin{bmatrix} -\mathrm{A}_{\mathcal{I}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I_{n_{\mathcal{V}}} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{A}_{\mathcal{C}}, \mathrm{A}_{\mathcal{R}}, \mathrm{A}_{\mathcal{L}}, \mathrm{A}_{\mathcal{V}}, \mathrm{A}_{\mathcal{I}}$ – element-bezogene Inzidenzmatrizen

$\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{L}$ – Beziehungen der Kapazitäten, Widerstände und Induktivitäten

passiv: $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\top > 0, \mathcal{L} = \mathcal{L}^\top > 0, \mathcal{G} + \mathcal{G}^\top > 0$

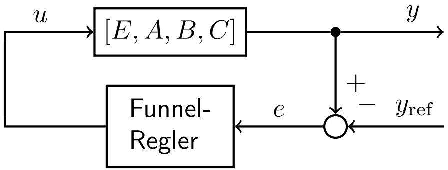
ℓ ist $\mathcal{K}$ – **loop** $:\Longleftrightarrow$ ℓ ist Kreis im Graphen der nur Kanten aus $\mathcal{K}$ enthält

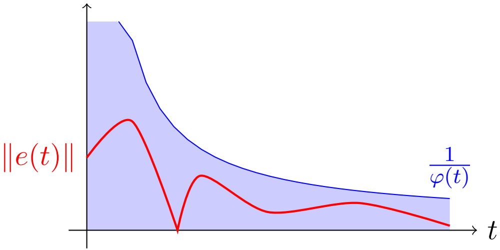
entspr. $\mathcal{I}$-loop, $\mathcal{ICL}$-loops, etc.

$\mathcal{L}$ ist $\mathcal{K}$ – **cutset** $:\Longleftrightarrow$ durch Löschen von $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ ensteht unzshgd. Graph und $\mathcal{L}$ ist minimal

entspr. $\mathcal{V}$-cutset, $\mathcal{VCL}$-cutset, etc.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$





Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \{ \ (x,u,y) \ \mid E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) = 0 \ \}$$

$\mathcal{ZD}$ **autonom** $:\iff$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{ZD} \ \forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ off. Interval :

$$w_1\big|_I = w_2\big|_I \implies w_1 = w_2$$

$\mathcal{ZD}$ **stabil** $:\iff \ \forall\, w \in \mathcal{ZD} : \ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$

$\lambda \in \mathbb{C}$ **ist invariante Nullstelle** $:\iff$

$$\operatorname{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda E - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < \operatorname{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \{ \ (x,u,y) \ \mid E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) = 0 \ \}$$

$\mathcal{ZD}$ autonom $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{Z}D \ \forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ off. Interval :

$$w_1|_I = w_2|_I \implies w_1 = w_2$$

$\mathcal{ZD}$ stabil $:\Longleftrightarrow \ \forall\, w \in \mathcal{ZD}: \ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist invariante Nullstelle $:\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda E - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < \mathrm{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \{ \ (x,u,y) \ \mid E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) = 0 \ \}$$

$\mathcal{ZD}$ autonom $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{ZD}\ \forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ off. Interval :

$$w_1|_I = w_2|_I \implies w_1 = w_2$$

$\mathcal{ZD}$ stabil $:\Longleftrightarrow \ \forall\, w \in \mathcal{ZD}: \ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist invariante Nullstelle $:\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda E - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < \mathrm{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \{\ (x,u,y)\ \mid E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\quad y(t) = Cx(t) = 0\ \}$$

$\mathcal{ZD}$ **autonom** $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{ZD}\ \forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ off. Interval :

$$w_1|_I = w_2|_I \implies w_1 = w_2$$

$\mathcal{ZD}$ **stabil** $:\Longleftrightarrow\ \forall\, w \in \mathcal{ZD}:\ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ **ist invariante Nullstelle** $:\Longleftrightarrow$

$$\operatorname{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda E - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} < \operatorname{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Theorem (stabile Nulldynamik)

$[E, A, B, C]$ sei MNA-Modell eines Schaltkreises

$$\mathcal{ZD} \text{ stabil} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet \quad \mathcal{ZD} \text{ autonom} \\ \bullet \quad \text{alle invarianten NST} \subseteq \mathbb{C}_- \end{cases}$$

$$\mathcal{ZD} \text{ autonom} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{weder } \mathcal{I}\text{-loops noch } \mathcal{V}\text{-cutsets}$$

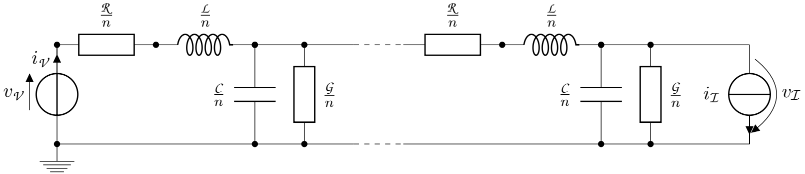
alle inv. NST $\subseteq \mathbb{C}_-$ $\Longleftarrow$

- weder $\mathcal{IL}$-loops mit Ausnahme von $\mathcal{I}$-loops, noch $\mathcal{VCL}$-cutsets mit Ausnahme von $\mathcal{VL}$-cutsets
- weder $\mathcal{VC}$-cutsets mit Ausnahme von $\mathcal{V}$-cutsets, noch $\mathcal{ICL}$-loops mit Ausnahme von $\mathcal{IC}$-loops

$\mathcal{ZD}$ autonom $\iff$ weder $\mathcal{I}$-loops noch $\mathcal{V}$-cutsets

alle inv. NST $\subseteq \mathbb{C}_-$ $\Longleftarrow$

- weder $\mathcal{IL}$-loops mit Ausnahme von $\mathcal{I}$-loops, noch $\mathcal{VCL}$-cutsets mit Ausnahme von $\mathcal{VL}$-cutsets
- weder $\mathcal{VC}$-cutsets mit Ausnahme von $\mathcal{V}$-cutsets, noch $\mathcal{ICL}$-loops mit Ausnahme von $\mathcal{IC}$-loops



Übertragungsleitung hat stabile Nulldynamik!

Theorem (Funnel-Regelung - stabile Nulldynamik)

$[E, A, B, C]$ sei MNA-Modell eines Schaltkreises mit

- $\mathcal{ZD}$ stabil
- $y_{\text{ref}} \in \mathcal{B}^{\infty}(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^m)$

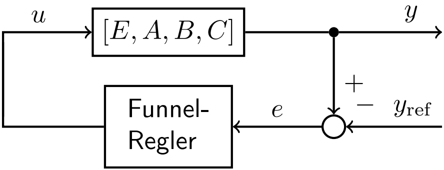
Dann erreicht der *Funnel-Regler*

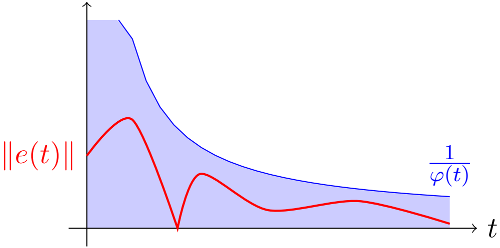
$$\boxed{\begin{aligned} &u(t) = -k(t)\, e(t), \qquad \text{wobei} \qquad e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t) \\ &k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)^2 \|e(t)\|^2}, \end{aligned}}$$

angewendet auf $[E, A, B, C]$, dass

$$x \in L^{\infty},\ k \in L^{\infty} \quad \wedge \quad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, t > 0 :\ \|e(t)\| \leq \varphi(t)^{-1} - \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned}
$$





Theorem (Funnel-Regelung - stabile inv. NST)

$[E, A, B, C]$ sei MNA-Modell eines Schaltkreises mit

- alle invarianten Nullstellen $\subseteq \mathbb{C}_-$
- $y_{\text{ref}} \in \mathcal{B}^\infty\left(\mathbb{R}_{\geq 0}; \operatorname{im} \mathrm{A}_{\mathcal{I}}^\top \times \ker Z_{\mathcal{CRLI}}^\top \mathrm{A}_{\mathcal{V}}\right)$, wobei

$$\operatorname{im} Z_{\mathcal{CRLI}} = \ker \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{\mathcal{C}} & \mathrm{A}_{\mathcal{R}} & \mathrm{A}_{\mathcal{L}} & \mathrm{A}_{\mathcal{I}} \end{bmatrix}^\top$$

Dann erreicht der *Funnel-Regler*

$$\boxed{\begin{array}{lll} u(t) = -k(t)\, e(t), & \text{wobei} & e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t) \\ k(t) = \dfrac{1}{1 - \varphi(t)^2 \|e(t)\|^2}, & & \end{array}}$$

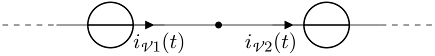
angewendet auf $[E, A, B, C]$, dass

$$x \in L^\infty,\ k \in L^\infty \quad \wedge \quad \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, t > 0: \ \|e(t)\| \leq \varphi(t)^{-1} - \varepsilon$$

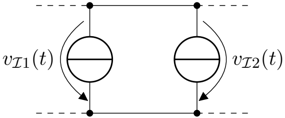
Interpretation von

$$y_{\mathrm{ref}}(t) \in \operatorname{im} A_{\mathcal{I}}^{\top} \times \ker Z_{\mathcal{CRLI}}^{\top} A_{\mathcal{V}} \quad \forall\, t \geq 0$$

$\longrightarrow$ y_{ref} erfüllt die Kirchhoffschen Gesetze punktweise!



$$\Rightarrow i_{\mathcal{V}1}(t) = i_{\mathcal{V}2}(t)$$



$$\Rightarrow v_{\mathcal{I}1}(t) = v_{\mathcal{I}2}(t)$$

$$n = 50, \quad \mathcal{C} = \mathcal{R} = \mathcal{G} = \mathcal{L} = 1, \quad y_{\mathrm{ref}} = (\sin, \cos)^\top$$
$$\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto 0.5\ t e^{-t} + 2\ \arctan t$$