Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

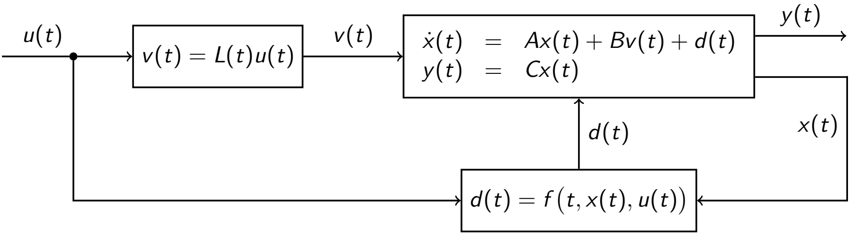
FAKULTÄT
FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

FACHBEREICH MATHEMATIK

Thomas Berger

Fehlertolerante Funnel-Regelung

Lineare Systeme mit Unsicherheiten und Aktuator-Fehlern

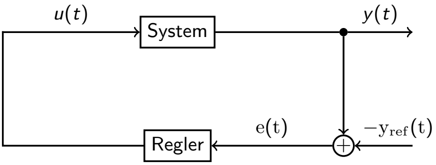


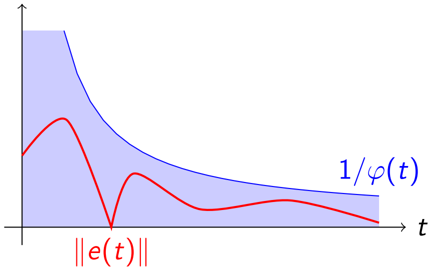
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $m \geq p$
- f stetig und beschränkt *(Modellierungs-Fehler, Unsicherheiten, Störungen, Aktuator-Sättigung, etc.)*
- $L \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m})$ s.d. $L, \dot{L}, \ldots, L^{(n)}$ beschränkt *(Zuverlässigkeit der Aktuatoren)*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BL(t)u(t) + f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad y(t) = Cx(t)$$

- $\operatorname{rk} BL(t) = q \geq p$ *(z.B. q Gruppen von Akuatoren, die dieselbe Aufgabe erledigen; in jeder mind. einer (teilw.) funktionstüchtig)*
  typisch: $q = p$
- $CA^k BL(\cdot) = 0, \; CA^k f(\cdot) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, r-2$
- $\Gamma := CA^{r-1}B \in \mathbb{R}^{p \times m}$ erfüllt $\operatorname{rk} \Gamma L(t) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Regelungs-Ziel





$$\Phi_r = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(r)} \text{ beschränkt,} \\ \varphi(\tau) > 0 \text{ für alle } \tau > 0, \\ \text{und } \liminf_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) > 0 \end{array} \right\}$$

Normalform - Erweiterung von [Ilchmann & Müller '07]

$$\mathcal{B}(t) := \left[BL(t), \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)\left(BL(t)\right), \ldots, \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)^{r-1}\left(BL(t)\right)\right] \in \mathbb{R}^{n \times rm},$$

$$\mathcal{C} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rp \times n}, \quad \operatorname{rk} \mathcal{C} = \rho, \;\; V \in \mathbb{R}^{n \times (n-\rho)}, \;\; \operatorname{im} V = \ker \mathcal{C},$$

$$\mathcal{N}(t) := V^\dagger \left[I_n - \mathcal{B}(t)\left(\mathcal{C}\mathcal{B}(t)\right)^\dagger \mathcal{C}\right] \in \mathbb{R}^{(n-\rho) \times n},$$

$$U(t) := \begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{N}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-\rho+pr) \times n}$$

Normalform - Erweiterung von [Ilchmann & Müller '07]

$$\mathcal{B}(t) := \left[BL(t), \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)\left(BL(t)\right), \ldots, \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)^{r-1}\left(BL(t)\right)\right] \in \mathbb{R}^{n \times rm},$$

$$\mathcal{C} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rp \times n}, \quad \operatorname{rk}\mathcal{C} = \rho, \;\; V \in \mathbb{R}^{n \times (n-\rho)}, \;\; \operatorname{im} V = \ker \mathcal{C},$$

$$\mathcal{N}(t) := V^\dagger \left[I_n - \mathcal{B}(t)\left(\mathcal{C}\mathcal{B}(t)\right)^\dagger \mathcal{C}\right] \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n},$$

$$U(t) := \begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{N}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-\rho+pr)\times n} \quad \Longrightarrow \quad \rho = pr \;\wedge\; U(t) \text{ invertierbar}$$

Theorem [B. '17]

U ist Lyapunov Transf. $\Big(\text{hinr.: } \det\big(\mathcal{CB}(t)(\mathcal{CB}(t))^\top\big) \geq \alpha > 0\Big)$

$$\Longrightarrow \quad (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) := \Big((UA + \dot{U})U^{-1}, UBL, CU^{-1}\Big),$$
$$\hat{f}(t, z, u) := U(t)f\big(t, U(t)^{-1}z, u\big)$$

haben die Form

$$\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_p & 0 \\ R_1(t) & R_2(t) & \cdots & R_{r-1}(t) & R_r(t) & S(t) \\ P_1(t) & P_2(t) & \cdots & P_{r-1}(t) & P_r(t) & Q(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Gamma L(t) \\ N(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_r \\ f_\eta \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_p & 0 \\ R_1(t) & R_2(t) & \cdots & R_{r-1}(t) & R_r(t) & S(t) \\ P_1(t) & P_2(t) & \cdots & P_{r-1}(t) & P_r(t) & Q(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Gamma L(t) \\ N(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_r \\ f_\eta \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\big(\operatorname{rk} BL(t) = \big)\ q = p \quad \Longrightarrow \quad P_2 = \ldots = P_r = 0 \ \wedge \ N = 0$$

Transformation: $\big(y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(r-1)}(t), \eta(t)\big) := U(t)x(t)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad y^{(r)}(t) &= \sum_{i=1}^{r} R_i(t) y^{(i-1)}(t) + S(t)\eta(t) + \Gamma L(t)u(t) \\
&\quad + f_r\big(t, y(t), \ldots, y^{(r-1)}(t), \eta(t), u(t)\big), \\
\dot{\eta}(t) &= \sum_{i=1}^{r} P_i(t) y^{(i-1)}(t) + Q(t)\eta(t) + N(t)u(t) \\
&\quad + f_\eta\big(t, y(t), \ldots, y^{(r-1)}(t), \eta(t), u(t)\big)
\end{aligned}$$

Transformation: $\big(y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(r-1)}(t), \eta(t)\big) := U(t)x(t)$

$$\Longrightarrow \quad y^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{r} R_i(t) y^{(i-1)}(t) + S(t)\eta(t) + \underbrace{\Gamma L(t)}_{>0} u(t)$$

$$+ \cancel{f_r\big(t, y(t), \ldots, y^{(r-1)}(t), \eta(t), u(t)\big)},$$

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=1}^{r} P_i(t) y^{(i-1)}(t) + \underbrace{Q(t)}_{\text{exp. st.}} \eta(t) + \cancel{N(t)u(t)}$$

$$+ \cancel{f_\eta\big(t, y(t), \ldots, y^{(r-1)}(t), \eta(t), u(t)\big)}$$

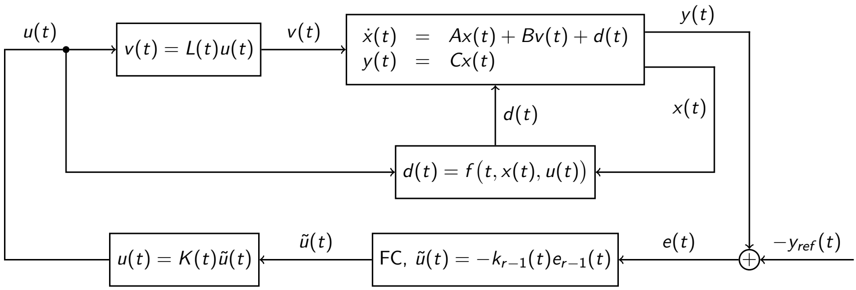
Funnel-Regler für Systeme mit bekanntem Relativgrad $r \in \mathbb{N}$

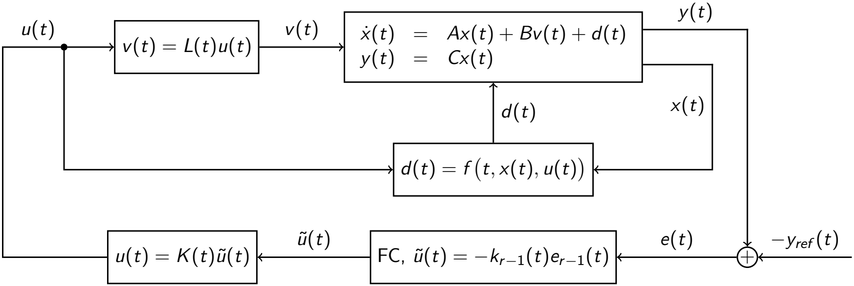
$$\boxed{\begin{aligned}
e_0(t) &= e(t) = y(t) - y_{ref}(t),\\
e_1(t) &= \dot e_0(t) + k_0(t)\, e_0(t),\\
e_2(t) &= \dot e_1(t) + k_1(t)\, e_1(t),\\
&\ \vdots\\
e_{r-1}(t) &= \dot e_{r-2}(t) + k_{r-2}(t)\, e_{r-2}(t),\\
k_i(t) &= 1/(1 - \varphi_i(t)^2 \|e_i(t)\|^2), \quad i = 0, \ldots, r-1\\
u(t) &= -k_{r-1}(t) e_{r-1}(t)
\end{aligned}}$$

Theorem [B., Hoang, Reis '17]

$y_{ref} \in \mathcal{W}^{r,\infty}$, $\varphi_i \in \Phi_{r-i}$, $\varphi_i(0)\|e_i(0)\| < 1 \implies u, k_i, y^{(i)}, \eta \in L^\infty$
und

$$\|e_i(t)\| \le \varphi_i(t)^{-1} - \varepsilon_i$$

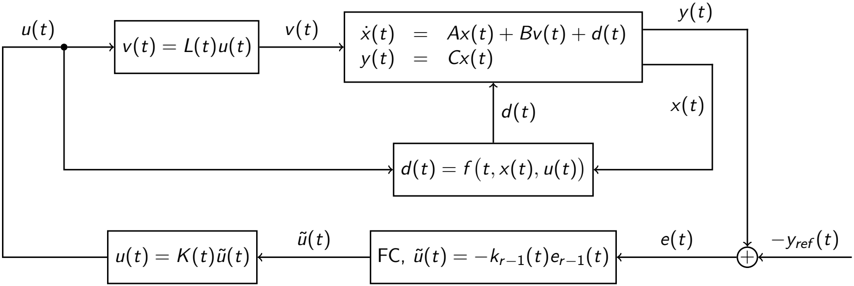

$u(t)$
$v(t) = L(t)u(t)$
$v(t)$
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) + d(t)$
$y(t) = Cx(t)$
$y(t)$
$d(t)$
$x(t)$
$d(t) = f(t, x(t), u(t))$
$u(t) = K(t)\tilde{u}(t)$
$\tilde{u}(t)$
FC, $\tilde{u}(t) = -k_{r-1}(t)e_{r-1}(t)$
$e(t)$
$-y_{ref}(t)$



$$\boxed{u(t) = -k_{r-1}(t)K(t)e_{r-1}(t)}$$

$$y^{(r)}(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} R_i(t)y^{(i-1)}(t) + S(t)\eta(t) + \Gamma L(t)K(t)\tilde{u}(t) + f_r$$

$$\dot{\eta}(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{r} P_i(t)y^{(i-1)}(t) + Q(t)\eta(t) + N(t)K(t)\tilde{u}(t) + f_\eta$$



$$\boxed{u(t) = -k_{r-1}(t)K(t)e_{r-1}(t)}$$

für Gewichtsmatrix $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times p})$ mit

- $\exists\, \alpha > 0 : \ \Gamma L(t)K(t) + \left(\Gamma L(t)K(t)\right)^\top \geq \alpha I_p,$
- $N(t)K(t) = 0$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BL(t)u(t) + f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad y(t) = Cx(t)$$

Theorem [B. '17]

- U ist Lyapunov Transformation
- $\dot{\eta}(t) = Q(t)\eta(t)$ ist glm. exponentiell stabil (Minimalphasigkeit)
- $\exists\, \alpha > 0 : \ \Gamma L(t)K(t) + \big(\Gamma L(t)K(t)\big)^\top \geq \alpha I_p$
- $N(t)K(t) = 0$
- $y_{ref} \in \mathcal{W}^{r,\infty}, \ \varphi_i \in \Phi_{r-i}, \ \varphi_i(0)\|e_i(0)\| < 1$

$\implies$ $u, k_i, x \in L^\infty$ und

$$\|e_i(t)\| \leq \varphi_i(t)^{-1} - \varepsilon_i$$

Wahl von $K(t)$

$q > p$: $\exists\, K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times p}) :\ \Gamma L(t)K(t)$ inv. $\ \wedge\ N(t)K(t) = 0$

$$\iff \quad \operatorname{im} \mathcal{B}(t)\big(\mathcal{C}\mathcal{B}(t)\big)^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \subseteq \operatorname{im} BL(t);$$

wähle $K(t) = \big(BL(t)\big)^\dagger \mathcal{B}(t)\big(\mathcal{C}\mathcal{B}(t)\big)^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$,

dann ist $\Gamma L(t)K(t) = I_p$ und $N(t)K(t) = 0$;

Nachteil: Systemparameter und L müssen bekannt sein!

Wahl von $K(t)$

$q > p$: $\exists\, K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times p}) : \ \Gamma L(t)K(t)$ inv. $\ \wedge\ N(t)K(t) = 0$

$$\iff \quad \operatorname{im} \mathcal{B}(t)\big(\mathcal{C}\mathcal{B}(t)\big)^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \subseteq \operatorname{im} BL(t);$$

wähle $K(t) = \big(BL(t)\big)^\dagger \mathcal{B}(t)\big(\mathcal{C}\mathcal{B}(t)\big)^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$,

dann ist $\Gamma L(t)K(t) = I_p$ und $N(t)K(t) = 0$;

Nachteil: Systemparameter und L müssen bekannt sein!

$q = p$: Erinnerung: $N(t) = 0$;

wähle $K(t) = \Gamma^\top$ und nehme an, dass

$$\Gamma\big(L(t) + L(t)^\top\big)\Gamma^\top \geq \alpha I_p$$

$\rightarrow$ es gibt mind. p lin. unabh. Aktuatoren, deren Zuverlässigkeit nicht gegen 0 geht;

Vorteil: nur Γ muss bekannt sein

Beispiel: Seitliche Bewegung einer Boeing 737 (linearisiert); aus [Tao et al. '04]

$$A = \begin{bmatrix} -0.13858 & 14.326 & -219.04 & 32.167 & 0 \\ -0.02073 & -2.1692 & 0.91315 & 0.000256 & 0 \\ 0.00289 & -0.16444 & -0.15768 & -0.00489 & 0 \\ 0 & 1 & 0.00618 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.15935 & 0.15935 & 0.00211 & 0.00211 \\ 0.01264 & 0.01264 & 0.21326 & 0.21326 \\ -0.12879 & -0.12879 & 0.00171 & 0.00171 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = (v_b, p_b, r_b, \phi, \psi)^\top, \quad u = (d_{r1}, d_{r2}, d_{a1}, d_{a2})^\top$$

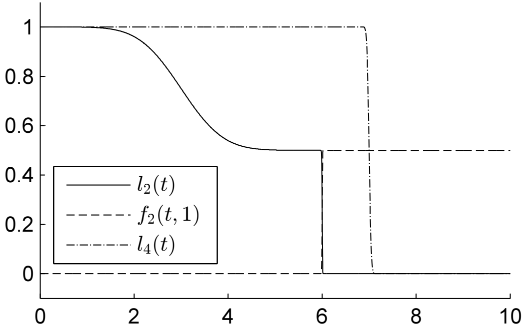
- v_b - Quergeschwindigkeit
- p_b - Rollgeschwindigkeit
- r_b - Giergeschwindigkeit
- ϕ - Rollwinkel
- ψ - Gierwinkel

- $d_{r1} + d_{r2}$ - Seitenruderstellung
- $d_{a1} + d_{a2}$ - Querruderstellung

$$L(t) = \operatorname{diag}\big(1, l_2(t), 1, l_4(t)\big), \quad f(t,u) = B\begin{pmatrix} 0 \\ f_2(t,u_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d_{r2}: langsam auf 50% abnehmende Effizienz auf $[0,6]$; bei $t = 6$ weiterer Fehler der zu Saturierung durch 1 führt

d_{a2}: plötzlicher Totalausfall bei $t = 7$



$$y_{ref,1}(t) = 2\sin t, \quad y_{ref,2}(t) = \cos t, \quad x(0) = 0,$$

$$\varphi_0(t) = (5e^{-t} + 0.1)^{-1}, \qquad \varphi_1(t) = \left(\tfrac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + 0.1\right)^{-1},$$

$$K(t) = \Gamma^\top = \begin{bmatrix} 0.01184 & -0.12879 \\ 0.01184 & -0.12879 \\ 0.21327 & 0.00171 \\ 0.21327 & 0.00171 \end{bmatrix}$$