Stabilisierung linearer DAEs

Thomas Berger

Institut für Mathematik, TU Ilmenau

Magdeburg, 26. September 2013

$$\left.\begin{array}{rcl}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}Ex(t) & = & Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) & = & Cx(t)\\ E,A\in\mathbb{R}^{l\times n}, & & B\in\mathbb{R}^{l\times m},\quad C\in\mathbb{R}^{p\times n}\end{array}\right\}=:\Sigma_{l,n,m,p}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}Ex(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \\ E, A \in \mathbb{R}^{l\times n}, & & B \in \mathbb{R}^{l\times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p\times n} \end{array}\right\} =: \Sigma_{l,n,m,p}$$

Ziel: Stabilisierung durch Steuerung

$$K_x\, x(t) + K_u\, u(t) = 0$$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \left\{ (x,u,y) \;\middle|\; 0 = \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array} \right\}$$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \left\{ (x,u,y) \;\middle|\; 0 = \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array} \right\}$$

$\mathcal{ZD}$ autonom $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{Z}D \;\forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ open interval :

$$w_1|_I = w_2|_I \implies w_1 = w_2$$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \left\{ (x,u,y) \;\middle|\; 0 = \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array} \right\}$$

$\mathcal{ZD}$ autonom $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{Z}D \;\forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ open interval :

$$w_1|_I = w_2|_I \implies w_1 = w_2$$

Prop.: $\mathcal{ZD}$ autonom $\quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{rk}_{\mathbb{R}[s]} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + m$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \left\{ (x,u,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} & \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = & Ax + Bu \\ 0 = & y = & Cx \end{array} \right\}$$

$\mathcal{ZD}$ autonom $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{ZD}\ \forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ open interval :

$$w_1\big|_I = w_2\big|_I \implies w_1 = w_2$$

Prop.: $\mathcal{ZD}$ autonom $\iff \operatorname{rk}_{\mathbb{R}[s]} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + m$

$\mathcal{ZD}$ stabil $:\Longleftrightarrow\ \forall\, w \in \mathcal{ZD}:\ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$

Nulldynamik:

$$\mathcal{ZD} := \left\{ (x,u,y) \;\middle|\; 0 = \begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ex & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array} \right\}$$

$\mathcal{ZD}$ **autonom** $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, w_1, w_2 \in \mathcal{ZD}\ \forall\, I \subseteq \mathbb{R}$ open interval :

$$w_1|_I = w_2|_I \implies w_1 = w_2$$

Prop.: $\mathcal{ZD}$ autonom $\quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{rk}_{\mathbb{R}[s]} \begin{bmatrix} sE - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + m$

$\mathcal{ZD}$ **stabil** $:\Longleftrightarrow\ \forall\, w \in \mathcal{ZD}:\ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$

Prop.: $\mathcal{ZD}$ stabil $\quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ :\ \operatorname{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda E - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + m$

Theorem („Normalform“)

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ mit $\operatorname{rk} C = p$ und $\mathcal{ZD}$ autonom

$$\Longrightarrow \quad \exists\, S \in \mathbf{Gl}_l(\mathbb{R}), T \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R}) : \; [SET, SAT, SB, CT] \triangleq$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & Q\, x_1 + A_{12}\, y \\ E_{22}\, \dot{y} + E_{23}\, \dot{x}_3 & = & A_{21}\, x_1 + A_{22}\, y + u \\ x_3 & = & \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k E_{32}\, y^{(k+1)} \\ 0 & = & A_{42}\, y - E_{42}\, \dot{y} - \sum_{k=0}^{\nu-1} E_{43} N^k E_{32}\, y^{(k+2)} \end{array}}$$

Theorem („Normalform“)

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ mit $\operatorname{rk} C = p$ und $\mathcal{ZD}$ autonom

$$\Longrightarrow \quad \exists\, S \in \mathbf{Gl}_l(\mathbb{R}), T \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R}) : \; [SET, SAT, SB, CT] \triangleq$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & Q\, x_1 + A_{12}\, y \\ E_{22}\, \dot{y} + E_{23}\, \dot{x}_3 & = & A_{21}\, x_1 + A_{22}\, y + u \\ x_3 & = & \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k E_{32}\, y^{(k+1)} \\ 0 & = & A_{42}\, y - E_{42}\, \dot{y} - \sum_{k=0}^{\nu-1} E_{43} N^k E_{32}\, y^{(k+2)} \end{array}}$$

Lem.: $\mathcal{ZD}$ stabil $\quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(Q) \subseteq \mathbb{C}_-$

$[E, A, B, C]$ rechts-invertierbar $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)\ \exists\,(x,u) \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m):\quad (x,u,y) \text{ löst } [E,A,B,C]$$

$[E, A, B, C]$ rechts-invertierbar $:\iff$

$$\forall\, y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)\ \exists\,(x,u) \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m):$$

(x, u, y) löst $[E, A, B, C]$

Proposition

$[E, A, B, C]$ mit $\mathcal{ZD}$ autonom, dann:

$[E, A, B, C]$ rechts-invertierbar $\iff$ $\operatorname{rk} C = p\ \wedge$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& Q\, x_1 + A_{12}\, y \\ E_{22}\, \dot{y} + E_{23}\, \dot{x}_3 &=& A_{21}\, x_1 + A_{22}\, y + u \\ x_3 &=& \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k E_{32}\, y^{(k+1)} \\ 0 &=& \underbrace{A_{42}}_{=0}\, y - \underbrace{E_{42}}_{=0}\, \dot{y} - \sum_{k=0}^{\nu-1} \underbrace{E_{43} N^k E_{32}}_{=0}\, y^{(k+2)} \end{array}}$$

Transmission zeros (TZ)

reguläre DAE ($\det(sE-A) \not\equiv 0$): Nullstellen von $C(sE-A)^{-1}B$

Transmission zeros (TZ)

reguläre DAE $(\det(sE - A) \not\equiv 0)$: Nullstellen von $C(sE - A)^{-1}B$

DAE mit **autonomer** $\mathcal{ZD}$: $\left[\begin{smallmatrix} sE-A & -B \\ -C & 0 \end{smallmatrix}\right]$ hat Links-Inverse $L(s)$ über $\mathbb{R}(s)$

$$H(s) := -[0, I_m]L(s)\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$$

Transmission zeros (TZ)

reguläre DAE ($\det(sE - A) \not\equiv 0$): Nullstellen von $C(sE - A)^{-1}B$

DAE mit **autonomer** $\boldsymbol{\mathcal{ZD}}$: $\left[\begin{smallmatrix} sE-A & -B \\ -C & 0 \end{smallmatrix}\right]$ hat Links-Inverse $L(s)$ über $\mathbb{R}(s)$

$$H(s) := -[0, I_m]L(s)\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m\times p}$$

$sE - A$ regulär $\wedge\ m = p \implies H(s) = \big(C(sE - A)^{-1}B\big)^{-1}$

Transmission zeros (TZ)

reguläre DAE ($\det(sE - A) \not\equiv 0$): Nullstellen von $C(sE - A)^{-1}B$

DAE mit **autonomer $\mathcal{ZD}$**: $\left[\begin{smallmatrix} sE-A & -B \\ -C & 0 \end{smallmatrix}\right]$ hat Links-Inverse $L(s)$ über $\mathbb{R}(s)$

$$H(s) := -[0, I_m] L(s) \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$$

$sE - A$ regulär $\wedge\ m = p \quad \Longrightarrow \quad H(s) = \left(C(sE - A)^{-1}B\right)^{-1}$

Def.: $s_0 \in \mathbb{C}$ ist TZ von $[E, A, B, C]$ $:\Longleftrightarrow$ s_0 ist Pol von $H(s)$

Transmission zeros (TZ)

reguläre DAE ($\det(sE-A)\not\equiv 0$): Nullstellen von $C(sE-A)^{-1}B$

DAE mit **autonomer** $\mathcal{ZD}$: $\left[\begin{smallmatrix} sE-A & -B \\ -C & 0 \end{smallmatrix}\right]$ hat Links-Inverse $L(s)$ über $\mathbb{R}(s)$

$$H(s) := -[0, I_m]L(s)\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{m\times p}$$

$sE-A$ regulär $\wedge\ m=p \implies H(s) = \left(C(sE-A)^{-1}B\right)^{-1}$

Def.: $s_0\in\mathbb{C}$ ist TZ von $[E,A,B,C]$ $:\Longleftrightarrow$ s_0 ist Pol von $H(s)$

Prop.: s_0 ist TZ $\iff$ s_0 ist Pol von $A_{21}(sI-Q)^{-1}A_{12}$

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ ist

- **stabilisierbar** (im Behavior-Sinn)

$$:\Longleftrightarrow \ \forall\, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ : \ \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}[\lambda E - A, -B] = \mathrm{rk}_{\mathbb{R}(s)}[sE - A, -B]$$

- **detektierbar** (im Behavior-Sinn)

$$:\Longleftrightarrow \ \forall\, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ : \ \mathrm{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda E - A \\ -C \end{bmatrix} = \mathrm{rk}_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} sE - A \\ -C \end{bmatrix}$$

Theorem (Charakterisierung stabile Nulldynamik)

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ rechts-invertierbar, mit autonomer $\mathcal{ZD}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{ZD}$ ist stabil genau dann, wenn

(i) $[E, A, B, C]$ ist stabilisierbar,

(ii) $[E, A, B, C]$ ist detektierbar,

(iii) $[E, A, B, C]$ hat keine transmission zeros in $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Theorem (Charakterisierung stabile Nulldynamik)

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ rechts-invertierbar, mit autonomer $\mathcal{ZD}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{ZD}$ ist stabil genau dann, wenn

(i) $[E, A, B, C]$ ist stabilisierbar,

(ii) $[E, A, B, C]$ ist detektierbar,

(iii) $[E, A, B, C]$ hat keine transmission zeros in $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Kor.: $sE - A$ regulär, $m = p$ und $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ inv.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{ZD}$ ist stabil genau dann, wenn

(i) $\forall\, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ : \ \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}[\lambda E - A, -B] = n$,

(ii) $\forall\, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ : \ \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}[\lambda E^\top - A^\top, -C^\top] = n$,

(iii) $G(s)$ hat keine Nullstellen in $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Kompatible Steuerung

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$, $K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$:

$$\mathcal{B}^{K}_{[E,A,B]} := \left\{ (x,u) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} Ex & = & Ax + Bu \\ 0 & = & K_x x + K_u u \end{array} \right\}$$

Kompatible Steuerung

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$, $K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$:

$$\mathcal{B}^K_{[E,A,B]} := \left\{ (x,u) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} Ex & = & Ax + Bu \\ 0 & = & K_x x + K_u u \end{array} \right\}$$

$$K = I_{n+m} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}^K_{[E,A,B]} = \{0\} \quad \rightarrow \text{ Quatsch!}$$

Kompatible Steuerung

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$, $K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$:

$$\mathcal{B}^K_{[E,A,B]} := \left\{ (x,u) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} Ex & = & Ax + Bu \\ 0 & = & K_x x + K_u u \end{array} \right\}$$

$$K = I_{n+m} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}^K_{[E,A,B]} = \{0\} \quad \to \text{ Quatsch!}$$

$K = [K_x, K_u]$ **kompatibel** mit $[E, A, B, C]$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, x^0 \in \mathbb{R} : \left(\exists\, (x,u) : \begin{array}{rcl} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} Ex & = & Ax + Bu \\ Ex(0) & = & Ex^0 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\exists\, (x,u) \in \mathcal{B}^K_{[E,A,B]} : \; Ex(0) = Ex^0 \right)$$

Def.: $\mathcal{B}$ lineares behavior; der **Lyapunov-Exponent** von $\mathcal{B}$ ist

$$k_L(\mathcal{B}) := \inf \left\{ \mu \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{r} \exists\, M_\mu > 0 \;\forall\, w \in \mathcal{B} \;\forall\, t \geq 0 : \\ \|w(t)\| \leq M_\mu e^{\mu t} \|w(0)\| \end{array} \right\}$$

Def.: $\mathcal{B}$ lineares behavior; der **Lyapunov-Exponent** von $\mathcal{B}$ ist

$$k_L(\mathcal{B}) := \inf \left\{ \mu \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{r} \exists\, M_\mu > 0 \;\forall\, w \in \mathcal{B} \;\forall\, t \geq 0 : \\ \|w(t)\| \leq M_\mu e^{\mu t} \|w(0)\| \end{array} \right\}$$

Def.: $k_L(E, A) := k_L(\mathcal{B})$ für $\mathcal{B} = \left\{ x \;\middle|\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ex = Ax \right\}$

Theorem (stabilisierende Steuerung)

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ rechts-invertierbar, mit autonomer $\mathcal{ZD}$

- $\dim \mathcal{ZD} > 0 \implies \exists\, K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$ kompatibel mit $[E, A, B, C]$:

$$k_L\big(\mathcal{B}^K_{[E,A,B]}\big) = k_L\left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ K_x & K_u \end{bmatrix}\right) = k_L(\mathcal{ZD})$$

- $\dim \mathcal{ZD} = 0 \implies \forall\, \mu \in \mathbb{R}\ \exists\, K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$ kompatibel mit $[E, A, B, C]$:

$$k_L\big(\mathcal{B}^K_{[E,A,B]}\big) \le \mu$$

Theorem (stabilisierende Steuerung)

$[E, A, B, C] \in \Sigma_{l,n,m,p}$ rechts-invertierbar, mit autonomer $\mathcal{ZD}$

- $\dim \mathcal{ZD} > 0 \implies \exists\, K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$ kompatibel mit $[E, A, B, C]$:

$$k_L\big(\mathcal{B}^K_{[E,A,B]}\big) = k_L\left(\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ K_x & K_u \end{bmatrix}\right) = k_L(\mathcal{ZD})$$

- $\dim \mathcal{ZD} = 0 \implies \forall\, \mu \in \mathbb{R}\ \exists\, K = [K_x, K_u] \in \mathbb{R}^{q\times n} \times \mathbb{R}^{q\times m}$ kompatibel mit $[E, A, B, C]$:

$$k_L\big(\mathcal{B}^K_{[E,A,B]}\big) \le \mu$$

Kor.: $sE - A$ regulär $\implies K = [F, -I_m]$, also **Feedback** $u = Fx$