



UNIVERSITÄT  
PADERBORN

Institut für Mathematik, Universität Paderborn

# FUNNEL-REGELUNG FÜR UNENDLICH-DIMENSIONALE SYSTEME

Thomas Berger

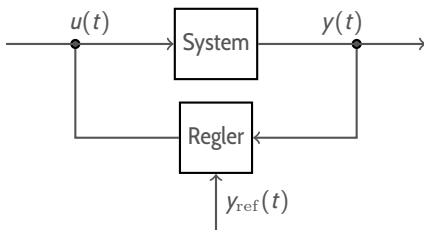
Passau, 10. Mai 2022



## Überblick

- 1) Regelung unter lediglich “strukturellen” Annahmen  
→ Motivation anhand von ODEs
- 2) Konzept der Funnel-Regelung
- 3) System-Klasse von abstrakten Differentialgleichungen  
→ enthält “einfache”  $\infty$ -dimensionale Systeme
- 4) “schwere” Klasse  $\infty$ -dimensionaler Systeme

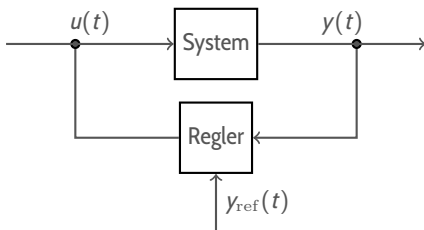
## Regelung



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t) &\in X \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

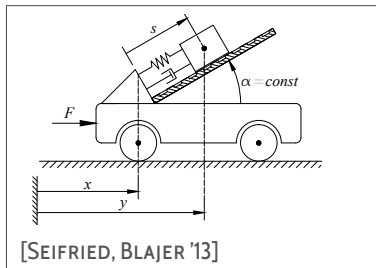
- keine Kenntnis der Systemparameter, nur “strukturelle” Annahmen an das Modell
- **Ziel:** einfacher Regler, so dass “ $y(t)$  verfolgt  $y_{\text{ref}}(t)$ ”

## Regelung



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t) &\in X \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

- keine Kenntnis der Systemparameter, nur “strukturelle” Annahmen an das Modell → **ODEs und PDEs in der selben Klasse!**
- **Ziel:** einfacher Regler, so dass “ $y(t)$  verfolgt  $y_{\text{ref}}(t)$ ”

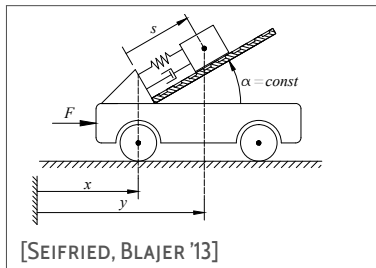


Winkel:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer  
Kennlinie:  $K(s)$ ,  $D(\dot{s})$

$$u(t) = F$$

$$y(t) = x(t) + s(t) \cos \alpha$$



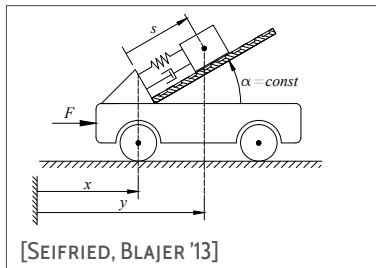
Winkel:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer  
Kennlinie:  $K(s)$ ,  $D(\dot{s})$

$$u(t) = F$$

$$y(t) = x(t) + s(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(s) - D(\dot{s}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$



Winkel:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer  
Kennlinie:  $K(s)$ ,  $D(\dot{s})$

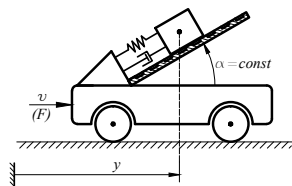
$$u(t) = F$$

$$y(t) = x(t) + s(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(s) - D(\dot{s}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \dot{x} + \dot{s} \cos \alpha$$

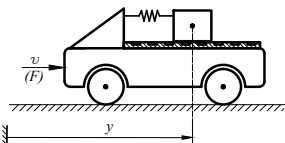
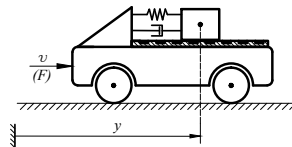
$$\ddot{y} = -c_1(K(s) + D(\dot{s}) - m_2 g \sin \alpha) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$



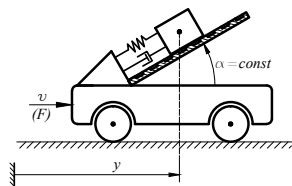
$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

$$\ddot{y} = f_1(s, \dot{s}) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

Relativgrad = 2



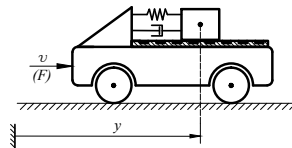




$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

$$\ddot{y} = f_1(s, \dot{s}) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

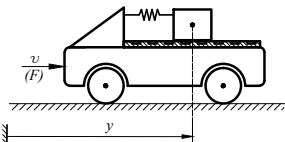
Relativgrad = 2

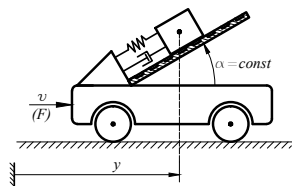


$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) \neq 0$$

$$y^{(3)} = f_2(s, \dot{s}) + \frac{D'(\dot{s})}{m_1 m_2} u$$

Relativgrad = 3

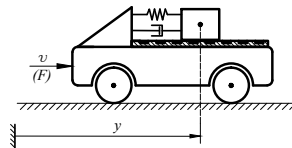




$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

$$\ddot{y} = f_1(s, \dot{s}) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

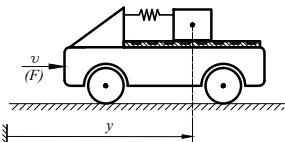
**Relativgrad = 2**



$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) \neq 0$$

$$y^{(3)} = f_2(s, \dot{s}) + \frac{D'(\dot{s})}{m_1 m_2} u$$

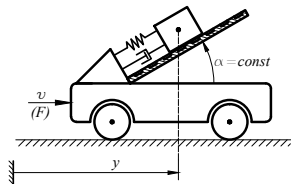
**Relativgrad = 3**



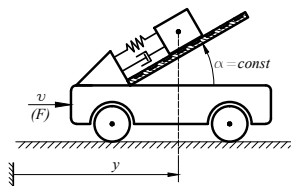
$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) = 0, \quad K'(s) \neq 0$$

$$y^{(4)} = f_3(s, \dot{s}) + \frac{K'(s)}{m_1 m_2} u$$

**Relativgrad = 4**

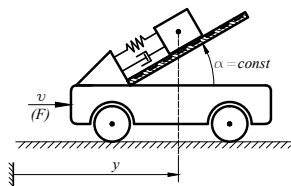


**Interne Dynamik:** verbleibende Dy-  
namik bei fixiertem Ausgang



**Interne Dynamik:** verbleibende Dy-  
namik bei fixiertem Ausgang

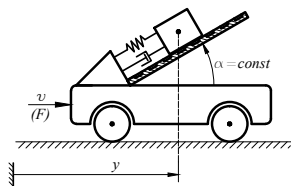
$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left( \frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left( \frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$



**Interne Dynamik:** verbleibende Dy-  
namik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left( \frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left( \frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1: \quad \ddot{s} = -K(s) - D(\dot{s}) + g$$

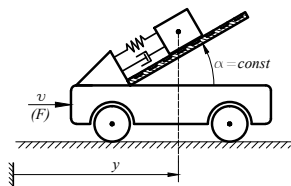


**Interne Dynamik:** verbleibende Dy-  
namik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left( \frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left( \frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1: \quad \ddot{s} = -K(s) - D(\dot{s}) + g$$

- Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie
- Dissipativität:  $D(\dot{s}) \dot{s} \geq 0$



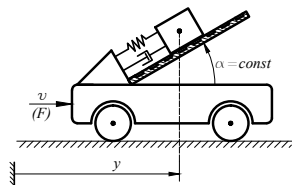
**Interne Dynamik:** verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left( \frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left( \frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1: \quad \ddot{s} = -K(s) - D(\dot{s}) + g$$

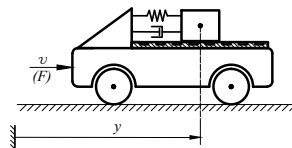
- Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie
- Dissipativität:  $D(\dot{s}) \dot{s} \geq 0$

$$\Rightarrow s, \dot{s} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



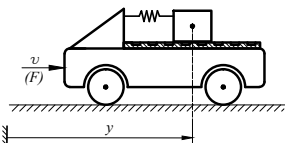
$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

stabile interne Dynamik



$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) \neq 0$$

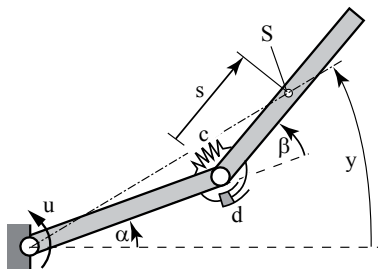
stabile interne Dynamik



$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) = 0, \quad K'(s) \neq 0$$

keine interne Dynamik





[SEIFRIED, BLAJER '13]

## Rotatorischer Arm

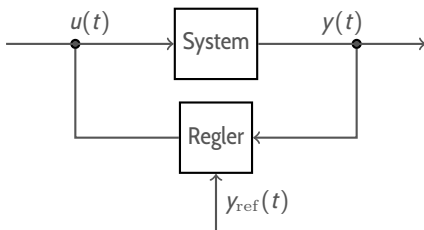
Eingang: Winkelgeschwindigkeit des angetriebenen Arms

Ausgang: Lage von  $S$  beschrieben durch Winkel  $\gamma$

Relativgrad = 1

**instabile interne Dynamik**

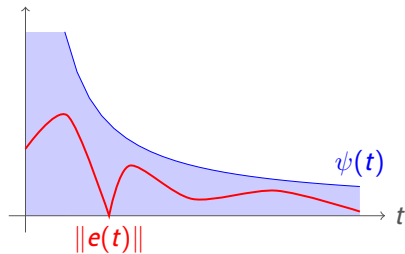
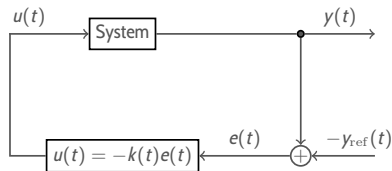
## Erinnerung



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t) &\in X \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

- keine Kenntnis der Systemparameter, nur: **Kenntnis des Relativgrads** und Annahme von **stabiler interner Dynamik**
- **Ziel:** einfacher Regler, so dass “ $y(t)$  verfolgt  $y_{\text{ref}}(t)$ ”

## Funnel-Regelung



$$k(t) = \frac{1}{\psi(t) - \|e(t)\|}$$

[ILCHMANN, RYAN, SANGWIN '02]:  
Funktioniert, wenn

- Relativgrad = 1
- stabile interne Dynamik

## Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

## Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

## Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -k_1y(t) - k_2\dot{y}(t) \implies \text{as. stabil für } k_1, k_2 \gg 0$$

## Funnel-Regler für Systeme mit höherem Relativgrad

**Funnel-Regelung via Backstepping:** [ILCHMANN, RYAN, TOWNSEND '06 & '07]

Nachteile: beschleunigte Steigerung der Regler-Komplexität für Relativgrad  $\geq 2$ , daher häufig schlechte Regelgüte

**Relativgrad = 2:** [HACKL, HOPFE, ILCHMANN, MÜLLER, TRENN '13]

Nachteile: keine Verallgemeinerung auf beliebigen Relativgrad

**Bang-Bang Funnel-Regler:** [LIBERZON & TRENN '13]

Nachteile: auf SISO-Systeme beschränkt, starke Kompatibilitätsbedingungen

**“Prescribed-Performance Control”:** [BECHLIOULIS & ROVITHAKIS '14]

Nachteile: auf Systeme mit trivialer interner Dynamik beschränkt

## Funnel-Regler für Systeme mit beliebigem Relativgrad

[B., Lê, REIS '18] & [B., ILCHMANN, RYAN '21]

$$e_1(t) = e(t), \quad e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t),$$

$$e_2(t) = \dot{e}(t) + k_1(t)e_1(t),$$

$$e_3(t) = \ddot{e}(t) + k_2(t)e_2(t),$$

$$\vdots$$

$$e_r(t) = e^{(r-1)}(t) + k_{r-1}(t)e_{r-1}(t),$$

$$u(t) = -k_r(t)e_r(t)$$

$$k_i(t) = 1/(\psi_i(t) - \|e_i(t)\|), \quad i = 1, \dots, r$$



## System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$d \in L^\infty$ ,  $T : C \rightarrow L_{\text{loc}}^\infty$  kausal, lokal Lipschitz, BIBO,  $f \in C$  mit HV-Eigenschaft

## System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$d \in L^\infty$ ,  $T : C \rightarrow L^\infty_{\text{loc}}$  kausal, lokal Lipschitz, BIBO,  $f \in C$  mit HV-Eigenschaft

### Linearer Prototyp:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $y(t) = Cx(t)$  mit

(A1)  $\text{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Re } \lambda \geq 0$ ;

(A2)  $CB = CAB = \dots = CA^{r-2}B = 0$  und  $CA^{r-1}B > 0$

## System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$d \in L^\infty$ ,  $T : C \rightarrow L^\infty_{\text{loc}}$  kausal, lokal Lipschitz, BIBO,  $f \in C$  mit HV-Eigenschaft

### Linearer Prototyp:

Ist äquivalent zu  $\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t)$ ,  $y(t) = \hat{C}z(t)$  mit

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_r & S \\ P & 0 & \dots & 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ CA^{r-1}B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [I_m \ 0 \ \dots \ 0 \ 0], \quad \sigma(Q) \subseteq \mathbb{C}_-$$

$$\begin{aligned} \implies y^{(r)}(t) &= R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + Se^{Qt} \eta(0) \\ &+ \int_0^t Se^{Q(t-\tau)} P y(\tau) d\tau + CA^{r-1} Bu(t) \end{aligned}$$

## System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$d \in L^\infty$ ,  $T : C \rightarrow L_{\text{loc}}^\infty$  kausal, lokal Lipschitz, BIBO,  $f \in C$  mit HV-Eigenschaft

### Linearer Prototyp:

$$\implies y^{(r)}(t) = T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t) + \Gamma u(t)$$

mit  $\Gamma = CA^{r-1}B$  und

$$T(y, \dots, y^{(r-1)})(t)$$

$$= R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + Se^{Qt} \eta(0) + \int_0^t Se^{Q(t-\tau)} P y(\tau) d\tau$$

## Funnel-Regler für Systeme mit bekanntem Relativgrad $r \in \mathbb{N}$

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$$e_1(t) = e(t), \quad e(t) = y(t) - y_{\text{ref}}(t),$$

$$e_2(t) = \dot{e}(t) + k_1(t)e_1(t),$$

$$\vdots$$

$$e_r(t) = e^{(r-1)}(t) + k_{r-1}(t)e_{r-1}(t),$$

$$u(t) = -k_r(t)e_r(t)$$

$$k_i(t) = 1/(\psi_i(t) - \|e_i(t)\|), \quad i = 1, \dots, r$$

### Theorem [B., LÊ, REIS '18] & [B., ILCHMANN, RYAN '21]

$$y_{\text{ref}} \in W^{r, \infty} \implies u, k_i, y^{(i)} \in L^\infty \text{ und } \|e_i(t)\| \leq \psi_i(t) - \varepsilon_i$$

## Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

erlaubt “einfache” Klasse von  $\infty$ -dimensionalen Systemen

→ interne Dynamik durch PDE modelliert

## Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

erlaubt “einfache” Klasse von  $\infty$ -dimensionalen Systemen

→ interne Dynamik durch PDE modelliert

$r = 1$ : [ILCHMANN, RYAN, SANGWIN '02, etc.]

$$(Ty)(t) = A_1 y(t) + A_2 \int_0^t \mathcal{T}(t-s) A_3 y(s) ds$$

- $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  exp. stabile  $C^0$ -Halbgruppe auf reellem Hilbert-Raum  $X$  mit Generator  $A_4 : \mathcal{D}(A_4) \subseteq X \rightarrow X$  (endlich-dimensional:  $\mathcal{T}(t) = e^{A_4 t}$ )
- $(A_4, A_3, A_2)$  “regular well-posed”,  $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$

## Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$r \in \mathbb{N}$ : [ILCHMANN, SELIG, TRUNK '16]

Byrnes-Isidori-Form für lineare  $\infty$ -dimensionale Systeme

$$\dot{\eta}(t) = A_4 \eta(t) + A_3 y(t),$$

$$y^{(r)}(t) = R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + A_2 \eta(t) + \gamma u(t)$$



## Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

$r \in \mathbb{N}$ : [ILCHMANN, SELIG, TRUNK '16]

Byrnes-Isidori-Form für lineare  $\infty$ -dimensionale Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= A_4 \eta(t) + A_3 y(t), \\ y^{(r)}(t) &= R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + A_2 \eta(t) + \gamma u(t) \\ &= T(y, \dots, y^{(r-1)})(t) + \gamma u(t)\end{aligned}$$

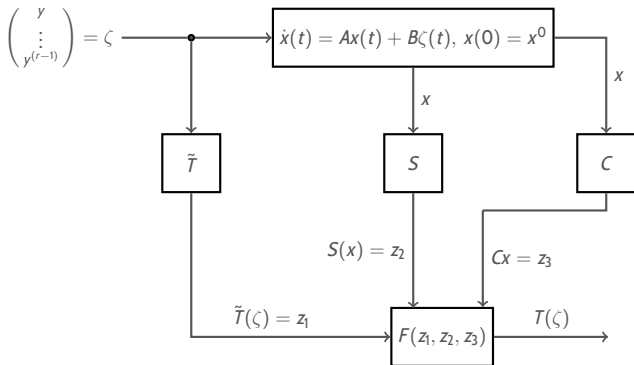
mit  $T(y, \dots, y^{(r-1)})(t)$

$$= R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + A_2 \int_0^t \mathcal{T}(t-s) A_3 y(s) ds$$

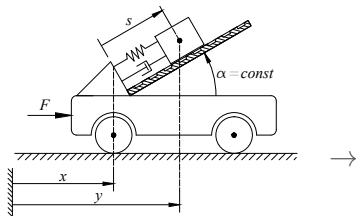
## Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t), u(t))$$

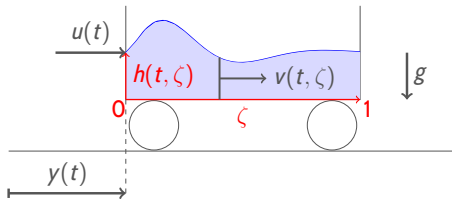
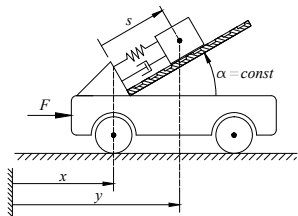
$r \in \mathbb{N}$ : [B., PUCHE, SCHWENNINGER '20]



- $(A, B, C)$  regular well-posed
- $f \mapsto \mathcal{L}^{-1}(G) * f$  beschränkt
- $S$  nichtlinear,  $\mathcal{D}(S) = X$ ,  $(A, B, S)$  BIBO-stabil

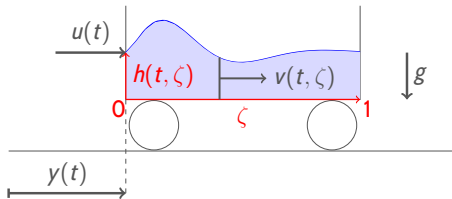
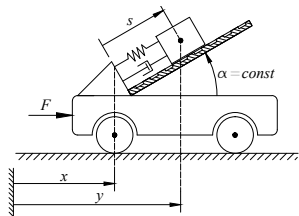


$$\ddot{y}(t) = T(y, \dot{y})(t) + \gamma u(t)$$



$$\ddot{y}(t) = T(y, \dot{y})(t) + \gamma u(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \hat{T}(y, \dot{y})(t) + \hat{\gamma} u(t)$$



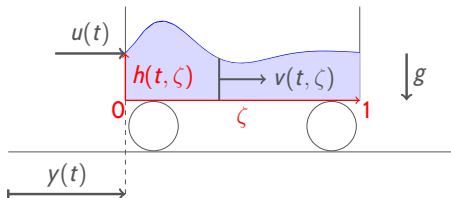
$$\ddot{y}(t) = T(y, \dot{y})(t) + \gamma u(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \hat{T}(y, \dot{y})(t) + \hat{\gamma} u(t)$$

**Endlich-/unendlich-dimensionale Systeme in der selben Klasse!**

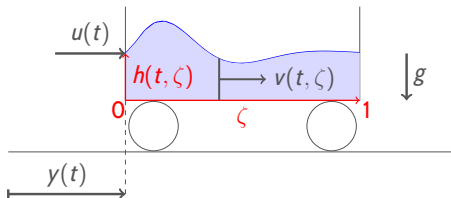
## Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '22]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left( \frac{v^2}{2} + gh \right) &= -\ddot{y} \\ + hS \left( \frac{v}{h} \right) &= 0 \end{aligned}$$



## Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '22]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left( \frac{v^2}{2} + gh \right) & \\ + hS \left( \frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$



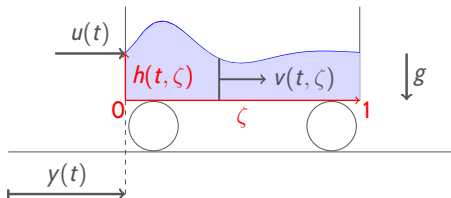
### Linearisiertes Modell:

$$\partial_t z_1 = -h_0 \partial_\zeta z_2, \quad \partial_t z_2 = -g \partial_\zeta z_1 - \mu z_2 - \ddot{y}, \quad z_2(t, 0) = z_2(t, 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{g}{2m_T} (z_1(t, 1) - z_1(t, 0)) (2h_0 + z_1(t, 1) + z_1(t, 0)) \\ &+ \frac{\mu h_0}{m_T} \int_0^1 z_2(t, \zeta) d\zeta + \frac{\mu}{m_T} \int_0^1 z_1(t, \zeta) z_2(t, \zeta) d\zeta + \frac{u(t)}{m_T} \end{aligned}$$

## Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '22]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left( \frac{v^2}{2} + gh \right) & \\ + hS \left( \frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$



### Linearisiertes Modell:

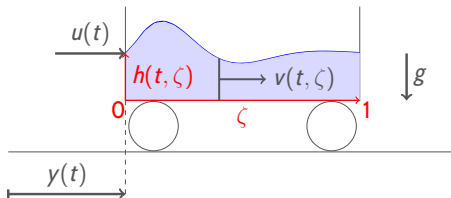
$$\dot{z}(t) = Az(t) + Ab\dot{y}(t), \quad Az = - \begin{pmatrix} h_0 \partial_\zeta z_2 \\ g \partial_\zeta z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1(t, 1) - z_1(t, 0) &= Cz(t) = CT(t)z(0) + C \int_0^t T(t-s)Ab\dot{y}(s) ds \\ &= c(t) + ((h_{L1} + h_\delta) * \dot{y})(t) \end{aligned}$$



## Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '22]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left( \frac{v^2}{2} + gh \right) \\ + hS \left( \frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$

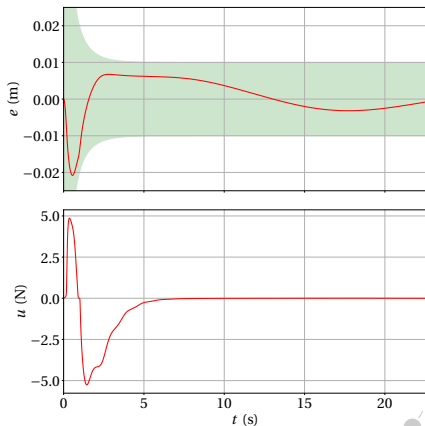
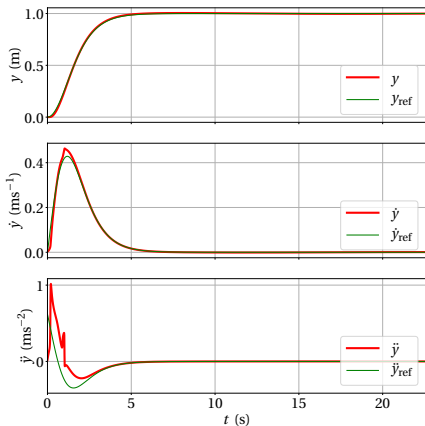


**Linearisiertes Modell:**

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Ab\dot{y}(t), \quad Az = - \begin{pmatrix} h_0 \partial_\zeta z_2 \\ g \partial_\zeta z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y}(t) = T(\dot{y})(t) + \frac{u(t)}{m_T}$$

## Simulation



## “Schwere” $\infty$ -dimensionale Systeme

→ es gibt kein Konzept eines Relativgrads!

- Randgesteuerte Wärmeleitungsgleichung [REIS, SELIG '15]

$$\partial_t x(t) = \Delta x(t), \quad u(t) = (\nu^\top \cdot \nabla x(t))|_{\partial\Omega},$$

$$y(t) = \int_{\partial\Omega} (x(t))(\zeta) d\zeta$$

- allgemeine Klasse von Randsteuerungsproblemen basierend auf m-dissipativen Operatoren [PUCHE, REIS, SCHWENNINGER '21, PUCHE '19]

$$\dot{x}(t) = \mathfrak{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subseteq X,$$

$$u(t) = \mathfrak{B}x(t), \quad y(t) = \mathfrak{C}x(t)$$

z.B. “lossy transmission line”, Wellengleichung, Diffusionsgleichung

- Fokker-Planck-Gleichung [B. '21] → *Video*

## Monodomain-Gleichung [B., BREITEN, PUCHE, REIS '21]

- (einfaches) Modell der elektrischen Aktivität des menschlichen Herzens zur Beschreibung von Defibrillations-Prozessen
- auftretende “reentry waves” entsprechen Fibrillations-Prozessen und sollen durch Regelung unterdrückt werden

$$\partial_t v = \operatorname{div}(D \nabla v) + I_{ion}(v, w) + I_{s,i} + B I_{s,e}, \quad (v^\top \cdot D \nabla v)|_{\partial \Omega} = 0,$$

$$\partial_t w = c_5 v - c_4 w$$

- $D$  – koerzive Diffusionsmatrix
- $B$  – Eingangs-Operator
- $v$  – transmembranes elektrisches Potential
- $w$  – zelluläre Zustandsvariable
- $I_{ion}$  – Ionenstrom durch die Membran
- $I_{s,i}$  – intrazellulärer Reizstrom
- $I_{s,e}$  – extrazellulärer Reizstrom

## Monodomain-Gleichung – FitzHugh-Nagumo-Modell

$$p_3(v) = -c_1 v + c_2 v^2 - c_3 v^3,$$

$$\text{Ausgang: } y = B'v,$$

$$I_{ion}(v, w) = p_3(v) - w$$

$$\text{Eingang: } I_{s,e}(t)$$

$A$  – elliptischer Neumann-Operator; falls  $\partial\Omega$  und  $D$  hinreichend glatt:

$$Av = \operatorname{div}(D\nabla v), \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ v \in W^{2,2}(\Omega) \mid (\nu^\top \cdot D\nabla v)|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

## Monodomain-Gleichung – FitzHugh-Nagumo-Modell

$$p_3(v) = -c_1 v + c_2 v^2 - c_3 v^3, \quad I_{ion}(v, w) = p_3(v) - w$$

$$\text{Ausgang: } y = B'v,$$

$$\text{Eingang: } I_{s,e}(t)$$

$A$  – elliptischer Neumann-Operator; falls  $\partial\Omega$  und  $D$  hinreichend glatt:

$$Av = \operatorname{div}(D\nabla v), \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ v \in W^{2,2}(\Omega) \mid (\nu^\top \cdot D\nabla v)|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{FHN-Modell:} \quad \partial_t v(t) &= Av(t) + p_3(v)(t) - w(t) + I_{s,i}(t) + BI_{s,e}(t), \\ \partial_t w(t) &= c_5 v(t) - c_4 w(t), \\ y(t) &= B'v(t) \end{aligned}$$

Lösungen über schwache Formulierung

## Monodomain-Gleichung – Eingangs-Ausgangskonfigurationen

- $q \in L^2(\Omega)$  und verteilter Eingang der Form  $Bz = z \cdot q$ , d.h.  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$

$$\implies y(t) = B'v(t) = \int_{\Omega} q(\xi) \cdot (v(t))(\xi) d\xi$$

Z.B.  $q = \mathbb{1}_{\omega}$  für  $\omega \subseteq \Omega$

## Monodomain-Gleichung – Eingangs-Ausgangskonfigurationen

- $q \in L^2(\Omega)$  und verteilter Eingang der Form  $Bz = z \cdot q$ , d.h.  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$

$$\implies y(t) = B'v(t) = \int_{\Omega} q(\xi) \cdot (v(t))(\xi) d\xi$$

Z.B.  $q = \mathbb{1}_{\omega}$  für  $\omega \subseteq \Omega$

- $q \in L^2(\partial\Omega)$  und Eingangs-Operator  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, W^{1,2}(\Omega)')$  mit

$$B'z = \int_{\partial\Omega} q(\xi) \cdot z(\xi) d\sigma$$

entspricht Neumann-Rand-Steuerung

$$\nu(\xi)^{\top} \cdot (D\nabla v(t))(\xi) = q(\xi) \cdot l_{s,e}(t), \quad \xi \in \partial\Omega$$

$$\implies y(t) = B'v(t) = \int_{\partial\Omega} q(\xi) \cdot (v(t))(\xi) d\sigma \quad (\text{Dirichlet-Randauswertung})$$



## Monodomain-Gleichung – Funnel-Regler

$$\varphi \in \Phi_\gamma := \left\{ \varphi \in W^{1,\infty}([0, \infty); \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} \varphi|_{[0,\gamma]} = 0; \\ \forall \delta > 0 : \inf_{t \geq \gamma + \delta} \varphi(t) > 0 \end{array} \right\}$$

→ Funnel-Rand  $\psi(t) = 1/\varphi(t)$  für  $t > \gamma$

$$\text{Regler: } l_{s,e}(t) = -\frac{k_0}{1 - \varphi(t)^2 \|B'v(t) - y_{\text{ref}}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2} (B'v(t) - y_{\text{ref}}(t)),$$

$$\varphi \in \Phi_\gamma, y_{\text{ref}} \in W^{1,\infty}([0, \infty); \mathbb{R}^m)$$

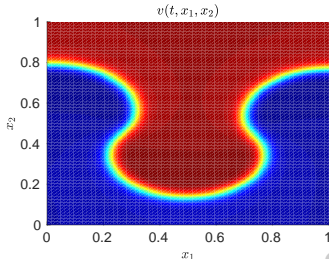
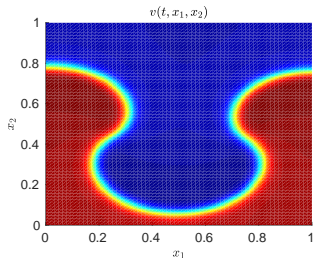
$$\forall t \in [0, \gamma] : l_{s,e}(t) = -k_0(B'v(t) - y_{\text{ref}}(t))$$

## Monodomain-Gleichung – Simulation

$$\begin{aligned}
 \text{FHN-Modell: } \quad \partial_t v(t) &= Av(t) + p_3(v)(t) - w(t) + I_{s,i}(t) + BI_{s,e}(t), \\
 \partial_t w(t) &= c_5 v(t) - c_4 w(t), \quad y(t) = B'v(t)
 \end{aligned}$$

Beispiel: typischer Defibrillations-Prozess als Folgeregelungsproblem

$\Omega = (0, 1)^2$ ;  $(v(0), w(0)) = (v_0^*, w_0^*)$  – Snapshot einer “reentry wave”,  
welche dysfunktionalen Herzrhythmen entsprechen, die  $I_{s,i}$  hemmen



## Monodomain-Gleichung – Simulation

*Aufgabe:* entwerfe Reizstromverlauf  $I_{s,e}$ , welcher einen natürlichen Herzrhythmus wiederherstellt

*Referenz*  $y_{\text{ref}} = B' v_{\text{ref}}$  entspricht Lösung  $(v_{\text{ref}}, w_{\text{ref}})$  mit  $(v_{\text{ref}}(0), w_{\text{ref}}(0)) = (0, 0)$ ,  $I_{s,e} = 0$  und

$$I_{s,i}(t) = 101 \cdot q(\xi) (\mathbb{1}_{[49,51]}(t) + \mathbb{1}_{[299,301]}(t)),$$
$$q(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 \leq 0.0225, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

## Monodomain-Gleichung – Simulation

*Aufgabe:* entwerfe Reizstromverlauf  $I_{s,e}$ , welcher einen natürlichen Herzrhythmus wiederherstellt

*Referenz*  $y_{\text{ref}} = B' v_{\text{ref}}$  entspricht Lösung  $(v_{\text{ref}}, w_{\text{ref}})$  mit  $(v_{\text{ref}}(0), w_{\text{ref}}(0)) = (0, 0)$ ,  $I_{s,e} = 0$  und

$$I_{s,i}(t) = 101 \cdot q(\xi) (\mathbb{1}_{[49,51]}(t) + \mathbb{1}_{[299,301]}(t)),$$

$$q(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 \leq 0.0225, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

*Regelung:* Eingangs-Operator  $B$  entspricht **Randsteuerung**

$$I_{s,e}(t) = -\frac{0.75}{1 - \varphi(t)^2 \|B'v(t) - y_{\text{ref}}(t)\|_{\mathbb{R}^2}^2} (B'v(t) - y_{\text{ref}}(t))$$

## Monodomain-Gleichung – Simulation

