Modellierung mit differentiell-algebraischen Gleichungen

Thomas Berger, Timo Reis

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Künzelsau, 19. November 2015

Inhalt

ODE Regelungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Für alle $x^0, u(\cdot)$ existiert eindeutige Lsg. $x(\cdot)$

DAE Regelungssystem

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

~~Für alle $x^0, u(\cdot)$ existiert eindeutige Lsg. $x(\cdot)$~~

DAE Regelungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = x^0$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

- Lsg. existiert nur für $x^0 \in \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $u(\cdot) = 0$
- Lsg. sind nicht eindeutig: $x_2(\cdot)$ ist frei
- insbesondere hat man **Eingangsbeschränkungen** ($u = 0$) und **freie Ausgänge** (y_2)

DAE Regelungssystem

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad x(0) = x^0 \\
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Lsg. existiert nur für $x^0 \in \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $u(\cdot) = 0$
- Lsg. sind nicht eindeutig: $x_2(\cdot)$ ist frei
- insbesondere hat man **Eingangsbeschränkungen** ($u = 0$) und **freie Ausgänge** (y_2)

Differentiell-algebraische Systeme / Deskriptorsysteme

$$\begin{aligned} 0 &= F(\dot{x}(t), x(t), u(t), t), \qquad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= G(x(t), t) \end{aligned}$$

mit

- $u(\cdot) : I \to \mathbb{R}^m$ Eingang (Stellgrößen, Rauschen, Störungen)
- $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}^n$ Zustand (interne Größe)
- $y(\cdot) : I \to \mathbb{R}^p$ Ausgang (Messgrößen, Beobachtung)
- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Anfangswert
- Funktionen $F(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ und $G(\cdot, \cdot)$

Differentiell-algebraische Systeme / Deskriptorsysteme

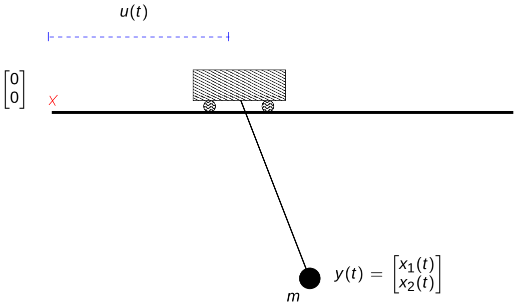
$$0 = F(\dot{x}(t), x(t), u(t), t), \qquad x(t_0) = x_0$$

differentiell-algebraische Gleichung

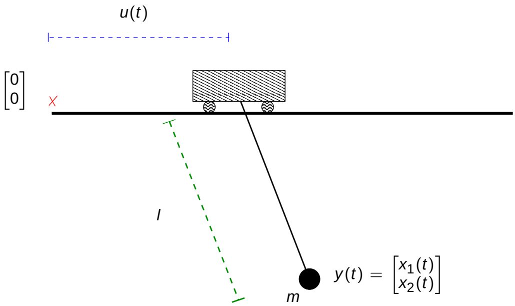
Wie helfen DAEs bei Modellierung und Simulation?

- Anwendungen enthalten typischerweise Nebenbedingungen, z.B. Pfadbeschränkungen, Erhaltungsgesetze, Kirchhoff'sche Gesetze
- keine Umformulierung der Modellgleichungen nötig, d.h. automatische Modellierung möglich (Modelica, `https://www.modelica.org/`)
- numerische Löser funktionieren für DAEs genauso gut wie für ODEs

Beispiel: Gesteuertes Pendel



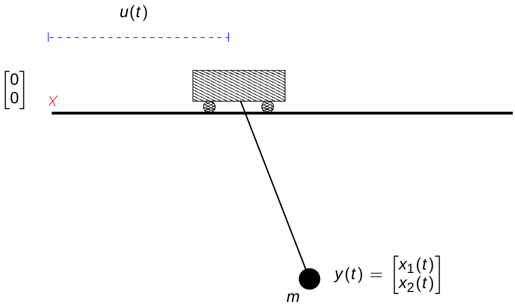
Beispiel: Gesteuertes Pendel



Zwangsbedingung durch das Seil

$$0 = (x_1(t) - u(t))^2 + x_2(t)^2 - l^2$$

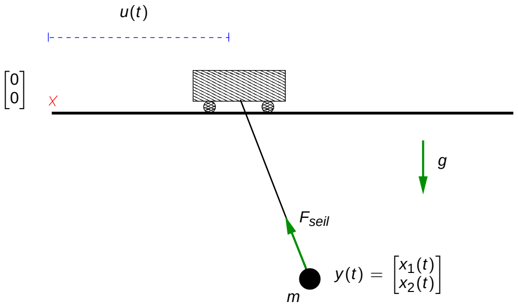
Beispiel: Gesteuertes Pendel



Definition der Geschwindigkeit

$$0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Beispiel: Gesteuertes Pendel



Kraftbilanz an der Masse

$$0 = m \begin{bmatrix}\dot{v}_1(t)\\ \dot{v}_2(t)\end{bmatrix} - \underbrace{\boldsymbol{\lambda}(t) \begin{bmatrix}x_1(t) - u(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}}_{\text{Kraft des Seils}} - \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ mg\end{bmatrix}}_{\text{Schwerkraft}}$$

Beispiel: Gesteuertes Pendel

Gesamtsystem

$$
\begin{aligned}
0 &= \dot{x}_1(t) - v_1(t) \\
0 &= \dot{x}_2(t) - v_2(t) \\
0 &= m\dot{v}_1(t) - \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot (x_1(t) - u(t)) \\
0 &= m\dot{v}_2(t) - \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot x_2(t) - mg \\
0 &= (x_1(t) - u(t))^2 + x_2(t)^2 - l^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= x_1(t) \\
y_2(t) &= x_2(t)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Gesteuertes Pendel

Gesamtsystem

$$
\begin{aligned}
0 &= F(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) \\
y(t) &= G(x(t), t)
\end{aligned}
$$

mit $\quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$

Inhalt

Grundaufgabe der Schaltungssimulation:

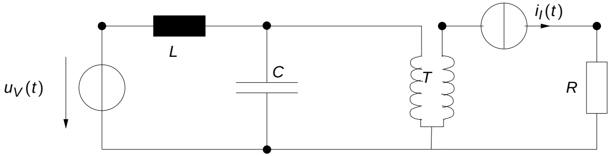
Gegeben:

- Elektrisches Netzwerk
- Spannungen an Spannungsquellen $u_V(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n_V}$
- Ströme an Stromquellen $i_I(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n_I}$

Gesucht:

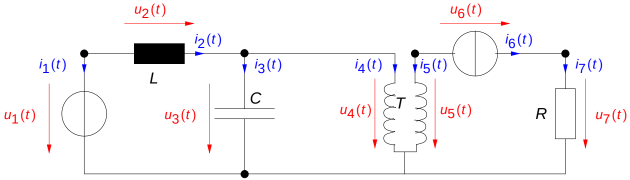
- Spannungen und Ströme an den übrigen Bauelementen
- Spannungen an Stromquellen $u_I(t)$
- Ströme an Spannungsquellen $i_V(t)$

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



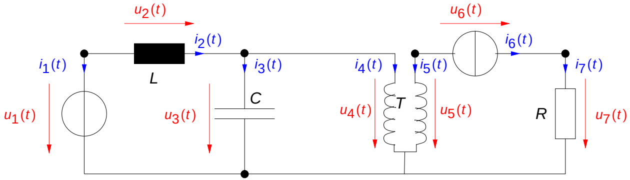
Ziel: Aufstellen des Gleichungssystems

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Benennung der beteiligten Grössen

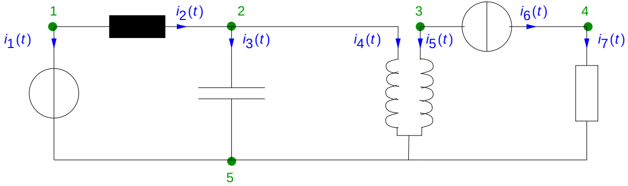
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Bauelementerelationen:

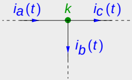
- $u_1(t) = u_V(t)$ Spannungsquelle
- $u_2(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t)$ Induktivität
- $i_3(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_3(t)$ Kapazität
- $u_5(t) = T \cdot u_4(t) \qquad i_4(t) = T \cdot i_5(t)$ Transformator
- $i_6(t) = i_I(t)$ Stromquelle
- $u_7(t) = R \cdot i_7(t)$ Widerstand

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



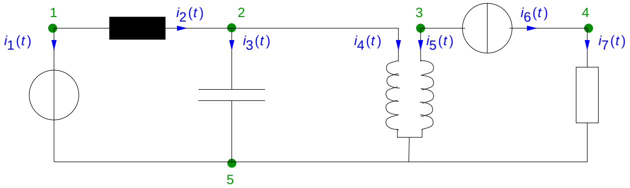
Kirchhoff'sches Stromgesetz:

In jedem Knoten verschwindet die Summe der ausgehenden Ströme.



$$\Rightarrow -i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$$

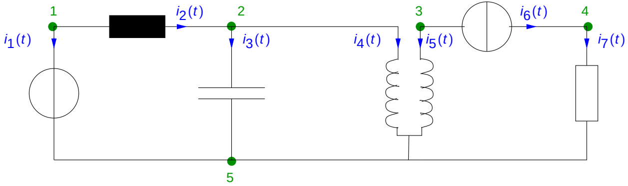
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Stromgesetz:

$$
\begin{aligned}
1:&\quad i_1(t) + i_2(t) = 0\\
2:&\quad -i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0\\
3:&\quad i_5(t) + i_6(t) = 0\\
4:&\quad -i_6(t) + i_7(t) = 0\\
5:&\quad -i_1(t) - i_3(t) - i_4(t) - i_5(t) - i_7(t) = 0
\end{aligned}
$$

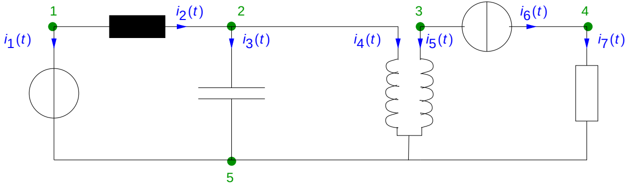
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Stromgesetz (in Matrix-Vektor-Schreibweise):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

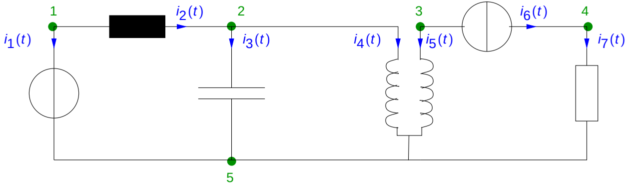
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff’sches Stromgesetz (in Matrix-Vektor-Schreibweise):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{=:A' \quad \text{Inzidenzmatrix}} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):

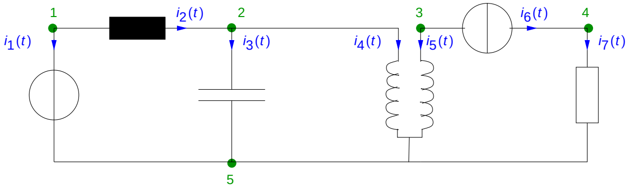


Kirchhoff'sches Stromgesetz:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es gilt $A' = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : j\text{-ter Zweig “beginnt” im Knoten } i \\ -1 & : j\text{-ter Zweig “endet” im Knoten } i \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$

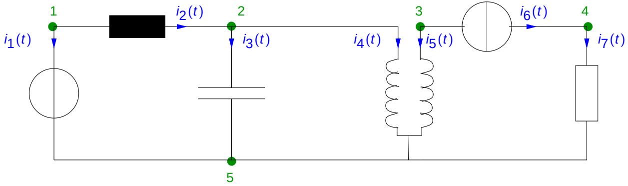
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Stromgesetz ist äquivalent zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

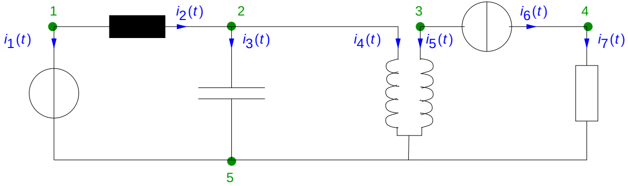
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Stromgesetz ist äquivalent zu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

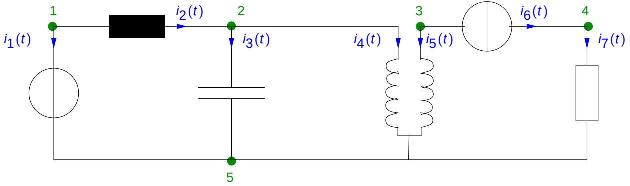
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Stromgesetz ist äquivalent zu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A \quad \text{reduzierte Inzidenzmatrix}} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \\ i_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

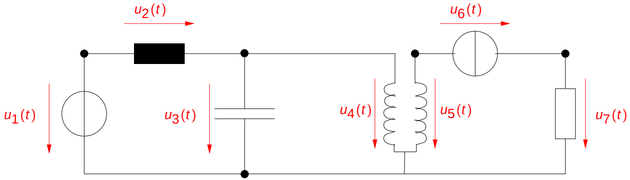
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Stromgesetz (Kurzform):

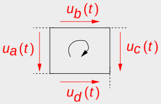
$$Ai(t) = 0 \quad \text{für } i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) & i_3(t) & i_4(t) & i_5(t) & i_6(t) & i_7(t) \end{bmatrix}^T$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



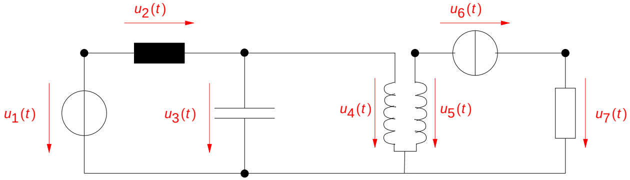
Kirchhoff'sches Spannungsgesetz:

In jeder Masche verschwindet die Summe der in Laufrichtung gerichteten Spannungen.



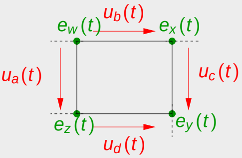
$$\Rightarrow -u_a(t) + u_b(t) - u_c(t) + u_d(t) = 0$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



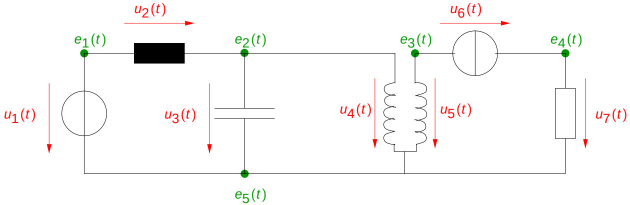
Kirchhoff'sches Spannungsgesetz (äquivalente Formulierung):

Jede Spannung kann als Differenz von Knotenpotenzialen dargestellt werden.



$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} u_a(t) &= e_w(t) - e_z(t) \\ u_b(t) &= e_w(t) - e_x(t) \\ u_c(t) &= e_x(t) - e_y(t) \\ u_d(t) &= e_z(t) - e_y(t) \end{aligned}$$

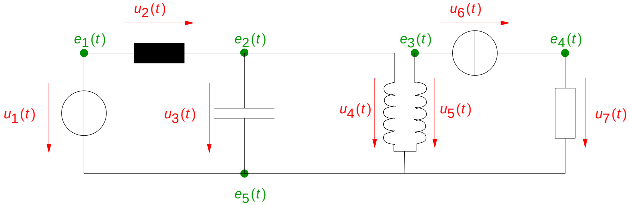
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Spannungsgesetz:

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= e_1(t) - e_5(t)\\
u_2(t) &= e_1(t) - e_2(t)\\
u_3(t) &= e_2(t) - e_5(t)\\
u_4(t) &= e_2(t) - e_5(t)\\
u_5(t) &= e_3(t) - e_5(t)\\
u_6(t) &= e_3(t) - e_4(t)\\
u_7(t) &= e_4(t) - e_5(t)
\end{aligned}
$$

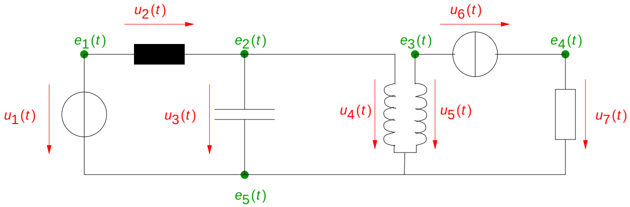
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Spannungsgesetz (Matrix-Vektor-Schreibweise):

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix}$$

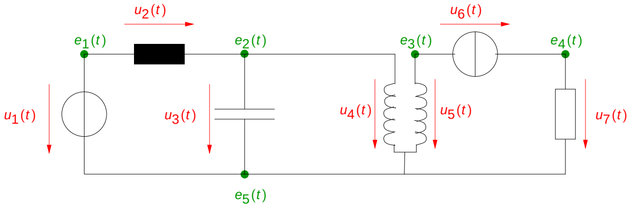
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff’sches Spannungsgesetz (Matrix-Vektor-Schreibweise):

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=A'^T} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix}$$

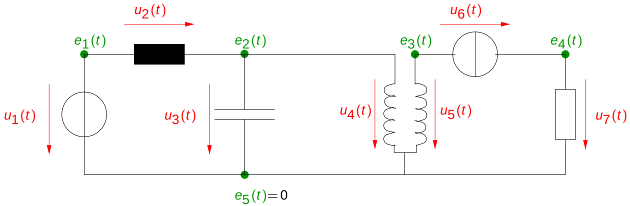
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Es gilt:

Der Potenzialvektor $\begin{bmatrix} e_1(t) & e_2(t) & e_3(t) & e_4(t) & e_5(t) \end{bmatrix}^T$ ist eindeutig bis auf Addition von Vielfachen von $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):

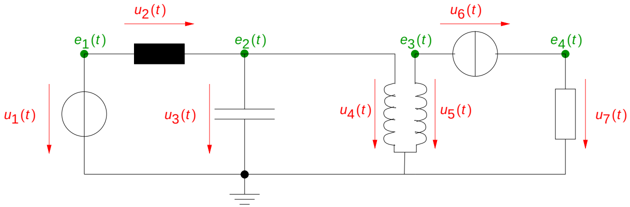


Es gilt:

Der Potenzialvektor $\begin{bmatrix} e_1(t) & e_2(t) & e_3(t) & e_4(t) & e_5(t) \end{bmatrix}^T$ ist eindeutig bis auf Addition von Vielfachen von $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$\Rightarrow$ Der Potenzialvektor kann eindeutig gemacht werden durch die zusätzliche Definition $e_5(t) = 0$. (Erdung)

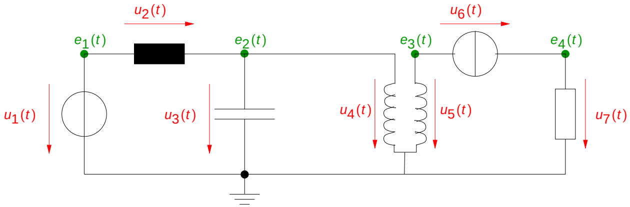
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Spannungsgesetz (Matrix-Vektor-Schreibweise):

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \\ u_6(t) \\ u_7(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=A^T} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix}$$

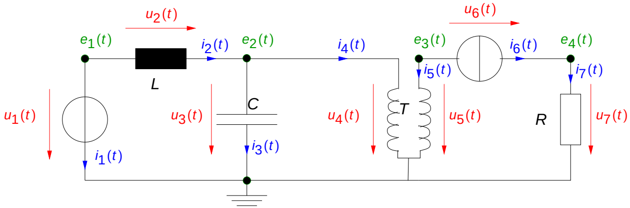
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Kirchhoff'sches Spannungsgesetz (Kurzform):

$$u(t) = A^T e(t)$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Beschreibende Gleichungen:

$$u_1(t) = u_V(t) \qquad u_2(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) \qquad i_3(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_3(t)$$

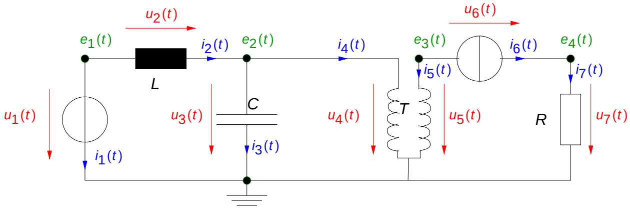
$$u_5(t) = T \cdot u_4(t) \qquad i_4(t) = T \cdot i_5(t) \qquad i_6(t) = i_I(t) \qquad u_7(t) = R \cdot i_7(t)$$

$$u_1(t) = e_1(t) \qquad u_2(t) = e_1(t) - e_2(t) \qquad u_3(t) = e_2(t)$$

$$u_4(t) = e_2(t) \qquad u_5(t) = e_3(t) \qquad u_6(t) = e_3(t) - e_4(t) \qquad u_7(t) = e_4(t)$$

$$0 = i_1(t) + i_2(t) \qquad 0 = -i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \qquad 0 = i_5(t) + i_6(t) \qquad 0 = -i_6(t) + i_7(t)$$

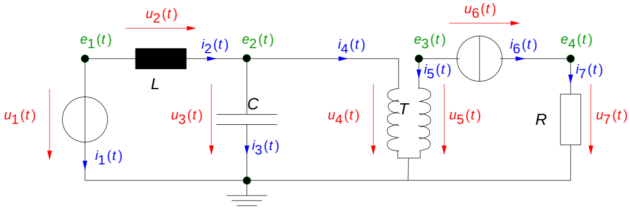
Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Beschreibende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
e_1(t) &= u_V(t) \\
e_1(t) - e_2(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) \\
e_3(t) &= T \cdot e_2(t) \\
0 &= i_1(t) + i_2(t) \\
0 &= -i_2(t) + C \frac{d}{dt} e_2(t) + T i_5(t) \\
0 &= i_5(t) + i_I(t) \\
0 &= -i_I(t) + R^{-1} e_4(t)
\end{aligned}
$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (Beispiel):



Beschreibende Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&C&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&L&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot e_1(t)\\ \dot e_2(t)\\ \dot e_3(t)\\ \dot e_4(t)\\ \dot i_2(t)\\ \dot i_5(t)\\ \dot i_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&-1&0&-1\\ 0&0&0&0&1&-T&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&R^{-1}&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0\\ 0&T&-1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t)\\ e_2(t)\\ e_3(t)\\ e_4(t)\\ i_2(t)\\ i_5(t)\\ i_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0\\ 0&0\\ 0&1\\ 0&-1\\ 0&0\\ 0&0\\ -1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_V(t)\\ i_I(t) \end{bmatrix}$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (allgemein):

Gegeben: Elektrisches Netzwerk mit

- Stromvektor $i(t)$,
- Spannungsvektor $u(t)$,
- Potenzialvektor $e(t)$,
- reduzierter Inzidenzmatrix A,
- Bauelementen,...

1. Schritt:
Unterteilung

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_C(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_{Tt}(t) \\ i_V(t) \\ i_I(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_C(t) \\ u_L(t) \\ u_{Ti}(t) \\ u_{Tt}(t) \\ u_V(t) \\ u_I(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_R & A_C & A_L & A_{Ti} & A_{Tt} & A_V \end{bmatrix}$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (allgemein):

Gegeben: Elektrisches Netzwerk mit

- Stromvektor $i(t)$,
- Spannungsvektor $u(t)$,
- Potenzialvektor $e(t)$,
- reduzierter Inzidenzmatrix A,
- Bauelementen,...

1. Schritt:
Unterteilung

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_C(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_{Tt}(t) \\ i_V(t) \\ i_I(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_C(t) \\ u_L(t) \\ u_{Ti}(t) \\ u_{Tt}(t) \\ u_V(t) \\ u_I(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} A_R & A_C & A_L & A_{Ti} & A_{Tt} & A_V \end{bmatrix}$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (allgemein):

Bauelementerelationen

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

$$u_{Tt}(t) = T \cdot u_{Ti}(t) \qquad i_{Ti}(t) = T^T \cdot i_{Tt}(t)$$

mit

R:	Widerstandsmatrix	(symmetrisch positiv definit)
C:	Kapazitätsmatrix	(symmetrisch positiv definit)
L:	Induktivitätsmatrix	(symmetrisch positiv definit)
T:	Transformatormatrix	

Modellierung elektrischer Netzwerke (allgemein):

Bauelementerelationen

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t), \quad i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t), \quad u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$
$$u_{Tt}(t) = T \cdot u_{Ti}(t), \quad i_{Ti}(t) = T^T \cdot i_{Tt}(t)$$

Kirchhoff'sches Stromgesetz

$$A_R i_R(t) + A_C i_C(t) + A_L i_L(t) + A_{Ti} u_{Ti}(t) + A_{Tt} i_{Tt}(t) + A_V i_V(t) + A_I i_I(t) = 0$$

Kirchhoff'sches Spannungsgesetz

$$u_R(t) = A_R^T e(t), \quad u_C(t) = A_C^T e(t), \quad u_L(t) = A_L^T e(t)$$
$$u_{Ti}(t) = A_{Ti}^T e(t), \quad u_{Tt}(t) = A_{Tt}^T e(t), \quad u_V(t) = A_V^T e(t)$$
$$u_I(t) = A_I^T e(t)$$

Modellierung elektrischer Netzwerke (allgemein):

Elimination der Spannungen sowie $i_R(t)$, $i_C(t)$ und $i_{Ti}(t)$ liefert

$$
\begin{aligned}
A_C C A_C \dot{e}(t) + A_R R^{-1} A_R e(t) + A_L i_L(t) + (A_{Ti} - A_{Tt} T) i_L(t) + A_V i_V(t) + A_I i_I(t) &= 0 \\
L \dot{i}_L(t) - A_L^T e(t) &= 0 \\
(A_{Ti}^T - T^T A_{Tt}^T) e(t) &= 0 \\
A_V^T e(t) - u_V(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Gesamtes Schaltungsmodell:

$$\begin{bmatrix} A_C C A_C^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{i}_L(t) \\ \dot{i}_{Ti}(t) \\ \dot{i}_V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_R R^{-1} A_R^T & -A_L & -A_{Ti} + A_{Tt} T^T & -A_V \\ A_L^T & 0 & 0 & 0 \\ A_{Ti}^T - T^T A_{Tt}^T & 0 & 0 & 0 \\ A_V^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_I(t) \\ u_V(t) \end{bmatrix}$$

Gesamtes Schaltungsmodell:

$$\begin{bmatrix} A_C C A_C^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{i}_L(t) \\ \dot{i}_{Ti}(t) \\ \dot{i}_V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_R R^{-1} A_R^T & -A_L & -A_{Ti} + A_{Tt} T & -A_V \\ A_L^T & 0 & 0 & 0 \\ A_{Ti}^T - T^T A_{Tt}^T & 0 & 0 & 0 \\ A_V^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_I(t) \\ u_V(t) \end{bmatrix}$$

Ausgangsgleichung:

$$\begin{bmatrix} u_I(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix}$$

Gesamtes Schaltungsmodell:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_C C A_C^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E} \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{i}_L(t) \\ \dot{i}_{Ti}(t) \\ \dot{i}_V(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -A_R R^{-1} A_R^T & -A_L & -A_{Ti} + A_{Tt} T^T & -A_V \\ A_L^T & 0 & 0 & 0 \\ A_{Ti}^T - T^T A_{Tt}^T & 0 & 0 & 0 \\ A_V^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix}}_{=:x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -A_I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}}_{=:B} \underbrace{\begin{bmatrix} i_I(t) \\ u_V(t) \end{bmatrix}}_{=:u(t)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_I(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix}}_{=:y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_I^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}}_{=:C} \begin{bmatrix} e(t) \\ i_L(t) \\ i_{Ti}(t) \\ i_V(t) \end{bmatrix}$$

Gesamtes Schaltungsmodell:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Deskriptorsystem

Schaltungsmodellierung (Erweiterungen)

- nichtlineare Schaltungen
- Operationsverstärker
- Wärme- und Wellenleiteffekte

Schaltungsanalyse und -modellierung (Forschungsaspekte)

- Strukturelle Analyse anhand der Netzwerktopologie (Lösungsverhalten, Stabilität, etc.)
- adaptive Regelung

Differentiell-algebraische Gleichungen (Forschungsaspekte)

- adaptive Regelung
- Beobachterentwurf
- Steuerbarkeits- und Beobachbarkeitsanalyse
- optimale Steuerung
- enegiebasierte Ansätze