Stabilitätstheorie zeitvarianter DAEs

Thomas Berger

Institut für Mathematik, TU Ilmenau

3. März 2010

Definition (Lösungen)

$x \in C^1\big((a,b), \mathbb{R}^n\big)$ heißt:

- **Lösung** $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ erfüllt (E,A) für alle $t \in (a,b)$

Definition (Lösungen)

$x \in C^1\big((a,b),\mathbb{R}^n\big)$ heißt:

- **Lösung** $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ erfüllt (E,A) für alle $t \in (a,b)$
- **(rechte) Fortsetzung** einer anderen Lösung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \to \mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ ist Lösung $\wedge\ \tilde{b} \le b\ \wedge\ \tilde{x} = x\,|_{(a,\tilde{b})}$

Definition (Lösungen)

$x \in C^1\big((a,b),\mathbb{R}^n\big)$ heißt:

- **Lösung** $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ erfüllt (E,A) für alle $t \in (a,b)$
- **(rechte) Fortsetzung** einer anderen Lösung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ ist Lösung $\wedge\ \tilde{b} \le b\ \wedge\ \tilde{x} = x\,\big|_{(a,\tilde{b})}$
- **rechts maximal** $:\Leftrightarrow$ $b = \tilde{b}$ für jede Fortsetzung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Definition (Lösungen)

$x \in C^1\big((a,b),\mathbb{R}^n\big)$ heißt:

- **Lösung** $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ erfüllt (E,A) für alle $t \in (a,b)$
- **(rechte) Fortsetzung** einer anderen Lösung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ ist Lösung $\wedge\ \tilde{b} \leq b\ \wedge\ \tilde{x} = x\,|_{(a,\tilde{b})}$
- **rechts maximal** $:\Leftrightarrow$ $b = \tilde{b}$ für jede Fortsetzung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$
- **rechts global** $:\Leftrightarrow$ $b = \infty$

Definition (Lösungen)

$x \in C^1\big((a,b),\mathbb{R}^n\big)$ heißt:

- **Lösung** $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ erfüllt (E,A) für alle $t \in (a,b)$
- **(rechte) Fortsetzung** einer anderen Lösung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \to \mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ ist Lösung $\;\wedge\; \tilde{b} \leq b \;\wedge\; \tilde{x} = x\,\big|_{(a,\tilde{b})}$
- **rechts maximal** $:\Leftrightarrow$ $b = \tilde{b}$ für jede Fortsetzung $\tilde{x} : (a,\tilde{b}) \to \mathbb{R}^n$
- **rechts global** $:\Leftrightarrow$ $b = \infty$
- **global** $:\Leftrightarrow$ $(a,b) = \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine globale Lösung (z.B. die triviale).

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung mit endlicher Entweichzeit.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung mit endlicher Entweichzeit.

  Wähle $\omega \in (t^0, \infty)$ und $c(t) = -\frac{1}{t-\omega} + \frac{1}{t^0-\omega}$, $t < \omega$.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung, die bei $\omega \in (t^0, \infty)$ keine endliche Entweichzeit hat und unstetig bei ω ist.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung, die bei $\omega \in (t^0, \infty)$ keine endliche Entweichzeit hat und unstetig bei ω ist.

  Wähle $c(t) = \sin \frac{\pi(t^0 - \omega)}{t - \omega}$, $t < \omega$.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung die bei $\omega \in (t^0, \infty)$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung die bei $\omega \in (t^0, \infty)$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Wähle $c(t) = (t - \omega) \sin \frac{\pi(t^0 - \omega)}{t - \omega}$, $t < \omega$.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung die bei $\omega \in (t^0, \infty)$ stetig und differenzierbar ist, aber deren Ableitung nicht stetig bei ω ist.

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x, \qquad x(t^0) = 0, \quad t^0 \in \mathbb{R}.$$

$x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^2$ ist Lösung $\iff x(t) = c(t) \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$, $c(\cdot) \in C^1$, $c(t^0) = 0$.

- Es gibt eine rechts maximale Lösung die bei $\omega \in (t^0, \infty)$ stetig und differenzierbar ist, aber deren Ableitung nicht stetig bei ω ist.

Wähle $c(t) = (t-\omega)^2 \sin \frac{\pi(t^0-\omega)}{t-\omega}$, $t < \omega$.

Äquivalenzrelation

$S \in C,\ T \in C^1,\ \det S(t),\ \det T(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$:

$$E_1(t)\dot{x} = A_1(t)x$$

Äquivalenzrelation

$S \in C,\ T \in C^1,\ \det S(t),\ \det T(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$:

$$E_1(t)\dot{x} = A_1(t)x$$

$$\Leftrightarrow \quad S(t)E_1(t)\dot{x} = S(t)A_1(t)x$$

Äquivalenzrelation

$S \in C,\ T \in C^1,\ \det S(t),\ \det T(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
& E_1(t)\dot{x} = A_1(t)x \\
\Leftrightarrow \quad & S(t)E_1(t)\dot{x} = S(t)A_1(t)x \\
\overset{x=Ty}{\Leftrightarrow} \quad & \underbrace{S(t)E_1(t)T(t)}_{=:E_2(t)}\dot{y} = \underbrace{\big(S(t)A_1(t)T(t) - S(t)E_1(t)\dot{T}(t)\big)}_{=:A_2(t)}y
\end{aligned}
$$

Äquivalenzrelation

$S \in C,\ T \in C^1,\ \det S(t),\ \det T(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & E_1(t)\dot{x} = A_1(t)x \\ \Leftrightarrow \quad & S(t)E_1(t)\dot{x} = S(t)A_1(t)x \\ \overset{x=Ty}{\Leftrightarrow} \quad & \underbrace{S(t)E_1(t)T(t)}_{=:E_2(t)}\dot{y} = \underbrace{\big(S(t)A_1(t)T(t) - S(t)E_1(t)\dot{T}(t)\big)}_{=:A_2(t)}y \end{aligned}$$

$\longrightarrow (E_1, A_1) \sim (E_2, A_2).$

Definition (SCF)

(E,A) heißt **überführbar in standard canonical form (SCF)** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$(E, A) \sim \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right),$$

$J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, und $N(t) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$

Definition (SCF)

(E,A) heißt **überführbar in standard canonical form (SCF)** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$(E, A) \sim \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right),$$

$J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, und $N(t) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$

$$E(t)\dot{x} = A(t)x \qquad \sim \qquad \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & J(t)y_1 \\ N(t)\dot{y}_2 & = & y_2 \end{array}$$

Definition (SCF)

(E,A) heißt **überführbar in standard canonical form (SCF)** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$(E, A) \sim \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right),$$

$J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, und $N(t) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$

- n_1, n_2 sind eindeutig innerhalb einer Äquivalenzklasse!

Definition (SCF)

(E,A) heißt **überführbar in standard canonical form (SCF)** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$(E,A) \sim \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \right),$$

$J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, und $N(t) = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & 0 \\ * & & 0 \end{bmatrix}$

- J und N sind eindeutig bis auf

$$(I_{n_1}, J) \sim (I_{n_1}, \tilde{J}), \quad (N, I_{n_2}) \sim (\tilde{N}, I_{n_2}).$$

Definition (konsistente Anfangswerte)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{ (t^0, x^0) \;\middle|\; \exists \text{ Lösung zu (E,A)}, \; x(t^0) = x^0 \right\} \\ \mathcal{V}(t^0) &:= \left\{ x^0 \;\middle|\; (t^0, x^0) \in \mathcal{V} \right\} \end{aligned}$$

Definition (konsistente Anfangswerte)

$$\mathcal{V} := \left\{ (t^0, x^0) \;\middle|\; \exists \text{ Lösung zu (E,A)}, \, x(t^0) = x^0 \right\}$$

$$\mathcal{V}(t^0) := \left\{ x^0 \;\middle|\; (t^0, x^0) \in \mathcal{V} \right\}$$

- $\forall\, t^0 \in \mathbb{R}: \; \mathcal{V}(t^0)$ ist linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$

Definition (konsistente Anfangswerte)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{ (t^0, x^0) \;\middle|\; \exists \text{ Lösung zu (E,A)}, \; x(t^0) = x^0 \right\} \\ \mathcal{V}(t^0) &:= \left\{ x^0 \;\middle|\; (t^0, x^0) \in \mathcal{V} \right\} \end{aligned}$$

- $\forall\, t^0 \in \mathbb{R} : \; \mathcal{V}(t^0)$ ist linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$
- $x : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (E,A) $\Rightarrow x(t) \in \mathcal{V}(t)$ für alle $t \in \mathcal{J}$

Theorem

(E,A) überführbar in SCF mittels S, T:

$$(t^0, x^0) \in \mathcal{V} \iff x^0 \in \operatorname{im} T(t^0) \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Theorem

(E,A) überführbar in SCF mittels S, T:

$$(t^0, x^0) \in \mathcal{V} \iff x^0 \in \operatorname{im} T(t^0) \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \underbrace{T(t) \begin{bmatrix} \Phi_J(t, t^0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T(t^0)^{-1}}_{=:U(t,t^0)} x^0,$$

ist die eindeutige globale Lösung von (E,A), $x(t^0) = x^0$ für $(t^0, x^0) \in \mathcal{V}$.

Theorem

(E,A) überführbar in SCF mittels S, T:

$$(t^0, x^0) \in \mathcal{V} \iff x^0 \in \operatorname{im} T(t^0) \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \underbrace{T(t) \begin{bmatrix} \Phi_J(t, t^0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T(t^0)^{-1}}_{=:U(t,t^0)} x^0,$$

ist die eindeutige globale Lösung von (E,A), $x(t^0) = x^0$ für $(t^0, x^0) \in \mathcal{V}$.

$U(\cdot\,,\cdot)$ ist die **verallgemeinte Übergangsmatrix** des Systems (E,A). Diese ist wohldefiniert.

Satz (Eigenschaften von $U(\cdot\,,\cdot)$)

(E,A) überführbar in SCF. $\forall\, t, r, s \in \mathbb{R}$:

Satz (Eigenschaften von $U(\cdot\,,\cdot)$)

(E,A) überführbar in SCF. $\forall\, t, r, s \in \mathbb{R}$:

- $E(t)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t,s) = A(t)\ U(t,s)$

Satz (Eigenschaften von $U(\cdot\,,\cdot)$)

(E,A) überführbar in SCF. $\forall\, t, r, s \in \mathbb{R}$:

- $E(t)\ \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} U(t,s) = A(t)\ U(t,s)$
- $\operatorname{im}\ U(t,s) = \mathcal{V}(t)$

Satz (Eigenschaften von $U(\cdot\,,\cdot)$)

(E,A) überführbar in SCF. $\forall\, t, r, s \in \mathbb{R}$:

- $E(t)\ \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} U(t,s) = A(t)\ U(t,s)$
- $\operatorname{im}\ U(t,s) = \mathcal{V}(t)$
- $U(t,r)\ U(r,s) = U(t,s)$

Satz (Eigenschaften von $U(\cdot\,,\cdot)$)

(E,A) überführbar in SCF. $\forall\, t, r, s \in \mathbb{R}$:

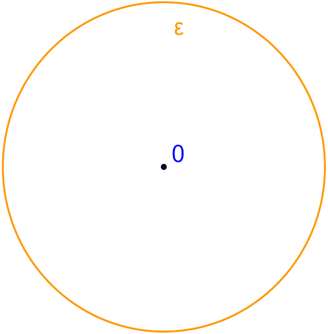
- $E(t)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t,s) = A(t)\ U(t,s)$
- $\operatorname{im}\ U(t,s) = \mathcal{V}(t)$
- $U(t,r)\ U(r,s) = U(t,s)$
- $U(t,t)^2 = U(t,t)$

Satz (Eigenschaften von $U(\cdot\,,\cdot)$)

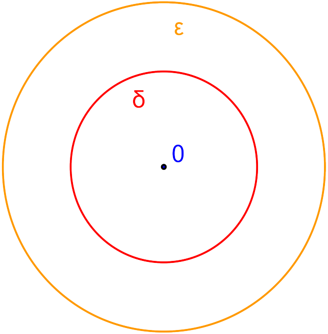
(E,A) überführbar in SCF. $\forall\, t, r, s \in \mathbb{R}$:

- $E(t)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t,s) = A(t)\ U(t,s)$
- $\operatorname{im}\ U(t,s) = \mathcal{V}(t)$
- $U(t,r)\ U(r,s) = U(t,s)$
- $U(t,t)^2 = U(t,t)$
- $\forall\, x \in \mathcal{V}(t):\ U(t,t)x = x$

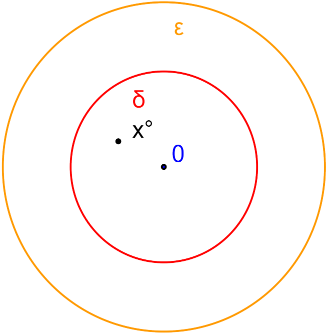
Stabilität:



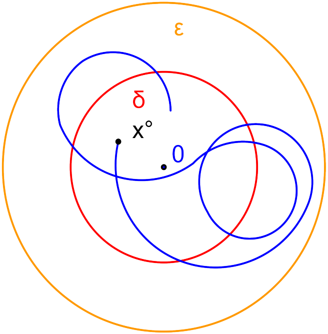
Stabilität:



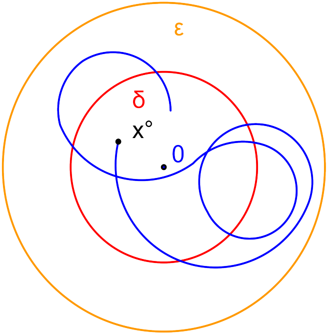
Stabilität:



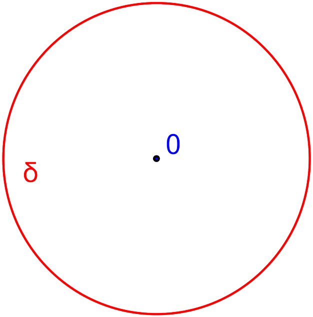
Stabilität:



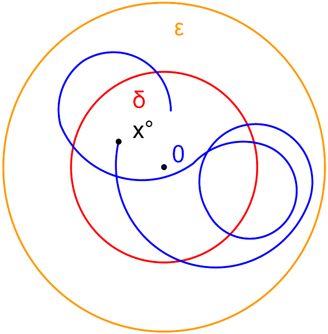
Stabilität:



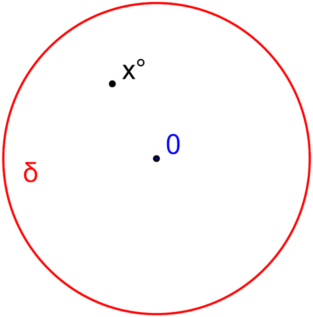
Attraktivität:



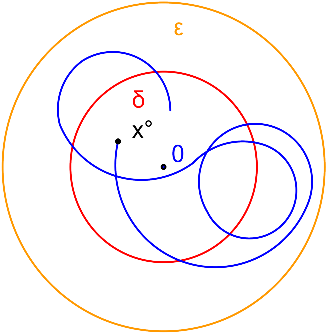
Stabilität:



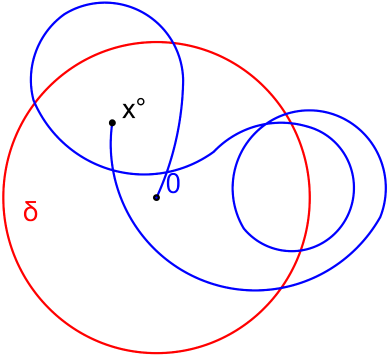
Attraktivität:



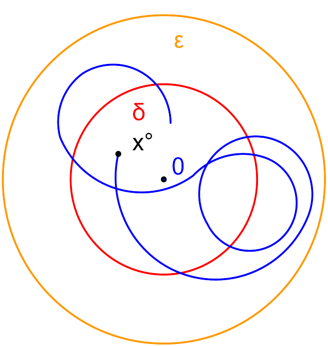
Stabilität:



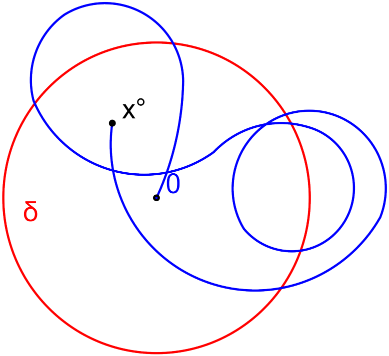
Attraktivität:



Stabilität:



Attraktivität:

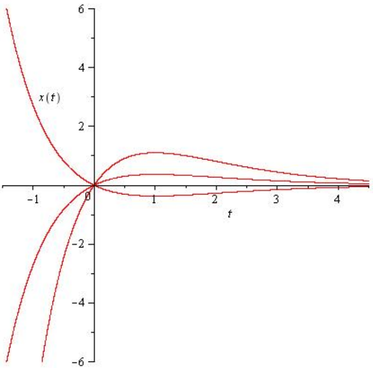


Theorem

(E,A) überführbar in SCF und attraktiv $\Rightarrow$ (E,A) stabil.

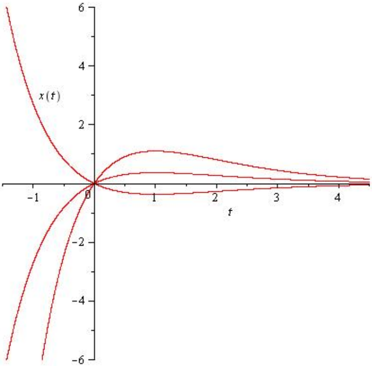
$$\begin{aligned} t\dot{x} &= (1-t)x, \\ t &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$t\dot{x} = (1-t)x,$$
$$t \in \mathbb{R}.$$



$$x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto cte^{-t},$$

$$t\dot{x} = (1-t)x,\quad t \in \mathbb{R}.$$

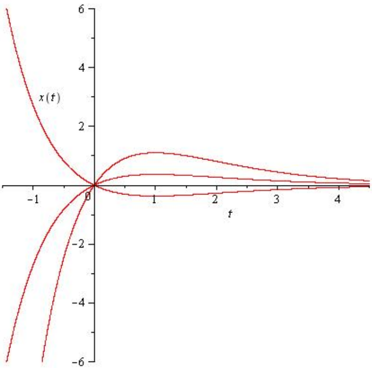


$$x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto cte^{-t},$$

- $\mathcal{V}(t) = \mathbb{R}$ für $t \neq 0$, $\mathcal{V}(0) = \{0\}$

$$t\dot{x} = (1-t)x,$$
$$t \in \mathbb{R}.$$

$$x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto cte^{-t},$$



- $\mathcal{V}(t) = \mathbb{R}$ für $t \neq 0$, $\mathcal{V}(0) = \{0\}$
- Das System ist attraktiv, aber nicht stabil.