Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Fachgebiet Analysis und Systemtheorie

Zur asymptotischen Stabilität linearer differential-algebraischer Gleichungen

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science

Thomas Berger

Betreuer: Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Stephan Trenn
Verantwortlicher Hochschullehrer:
Prof. Dr. Achim Ilchmann

Ilmenau, 12. August 2008

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinen Betreuern Dipl.-Math. Dipl.-Inf. Stephan Trenn und Prof. Dr. Achim Ilchmann sowohl für die Anregung zu dieser Arbeit als auch für die vielen hilfreichen Ratschläge und Antworten auf zahlreiche Fragen recht herzlich bedanken.

Erklärung: „Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle von mir aus anderen Veröffentlichungen übernommenen Passagen sind als solche gekennzeichnet.“

Ilmenau, 12. August 2008

....

Thomas Berger

Zusammenfassung

Differential-algebraische Gleichungen gewinnen in vielen technischen Gebieten, wie zum Beispiel der Elektrotechnik, immer mehr an Bedeutung. Da sie in den meisten Fällen aber nicht explizit lösbar sind, oder schwer handhabbare Lösungen besitzen, konzentriert man sich auf qualitative Aussagen über das Systemverhalten. In dieser Arbeit wird daher die asymptotische Stabilität linearer, homogener, differential-algebraischer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten-Matrizen ausführlich untersucht und notwendige sowie hinreichende Bedingungen für diese angegeben. In diesem Zusammenhang wird die Lösbarkeit der sogenannten verallgemeinerten Lyapunov-Gleichung sowie die Eindeutigkeit und Darstellung der Lösung analysiert werden. Als Grundlage dient die Lösungstheorie differential-algebraischer Gleichungen. Im Anhang befindet sich diesbezüglich eine vermutlich neue Darstellungsform der Lösungen mittels verallgemeinerter Hauptvektoren.

Abstract

Differential-algebraic equations are becoming increasingly important in a lot of technical areas, such as electrical engineering. Yet they are not explicitly solvable in most cases, or have hardly manageable solutions, one focuses on qualitative statements about the system behavior. Hence in this work the asymptotic stability of linear, homogeneous, differential-algebraic equations with constant coefficients matrices is investigated in detail and necessary as well as sufficient conditions for it are specified. In this context the solvability of the so-called generalized Lyapunov equation as well as the uniqueness and presentation of the solution will be analysed. The theory of solutions of differential-algebraic equations provides the basis for the analysis. Regarding this a probably new presentation of the solutions via generalized hauptvectors is located in the appendix.

Notationen

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{N}_0$	die Menge der natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die Menge der komplexen Zahlen
$\overline{z}$	die konjugiert komplexe Zahl zu $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Re}(z)$	der Realteil von $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$	die offene linke Halbebene
$\mathbb{K}^n$	der Vektorraum der reellwertigen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder komplexwertigen ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Vektoren mit n Komponenten
$\mathbb{K}^{n \times m}$	die Menge der reelwertigen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder komplexwertigen ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $(n \times m)$-Matrizen
$\\|v\\|$	die euklidische Norm des Vektors $v \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\\|A\\|$	die Spektralnorm der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
A^T	die Transponierte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$A^* = (\overline{A})^T$	die Adjungierte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$	die Einheitsmatrix der Ordnung $n \in \mathbb{N}$
$\mathrm{rank}\,(A)$	der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\mathcal{N}(A)$	der Kern oder Nullraum einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\mathcal{R}(A)$	das Bild einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$A\mathcal{M} = \{Ax \mid x \in \mathcal{M}\}$	das Bild der Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{K}^n$ unter der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$A^{-1}\mathcal{M} = \{x \mid Ax \in \mathcal{M}\}$	das Urbild der Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{K}^m$ unter der Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\det(A)$	die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\sigma(A)$	das Spektrum, also die Menge der Eigenwerte, einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\lambda_{max}(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$	das Maximum der Eigenwertrealteile einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\mathbb{K}[\lambda]$	die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und der Unbestimmten λ
$\deg(p)$	der Grad eines Polynoms $p \in \mathbb{K}[\lambda]$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
$\mathrm{dom}(f)$	der Definitionsbereich einer Funktion f
$f\mid_M$	die Einschränkung der Funkion f auf eine Menge $M \subseteq \mathrm{dom}(f)$

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In vielen Bereichen der Physik und Technik spielt die Stabilitätstheorie eine zentrale Rolle. Differentialgleichungen bilden dabei die zentrale Methode zur Beschreibung zeitabhängiger Prozesse. Nun sind viele Gleichungen nicht explizit lösbar, oder führen auf schwer handhabbare Lösungen. Mit Hilfe numerischer Verfahren kann man die Lösungen auf vorgegebenen, festen Zeitintervallen zwar sehr genau berechnen, aber häufig ist man mehr an dem qualitativen Verhalten der Lösungen interessiert. Ein primäres Thema dieser qualitativen Theorie von Differentialgleichungen ist die Stabilitätstheorie, mit der sich diese Bachelorarbeit beschäftigt.

Diese Theorie untersucht das Verhalten von Lösungen von Anfangswertproblemen, wenn bei festgehaltener Anfangszeit der Anfangswert variiert. Beispielsweise können die durch diese Variation erhaltenen, neuen Lösungen in der Nähe der Ausgangslösung bleiben, gegen sie konvergieren oder sich gar beliebig weit von ihr entfernen. Anschaulich können wir folgendes Beispiel betrachten. Stellen wir uns einen parabelförmigen Hügel vor. Platzieren wir nun einen Ball exakt auf der Spitze dieses Hügels so wird er sich ohne äußere Einflüsse nicht bewegen. Er befindet sich in einer Gleichgewichtslage. Dass diese allerdings instabil ist, sieht man daran, dass bereits die kleinste Abweichung von der Spitze den Ball den Hügel herunterrollen lassen wird. Diese Abweichung ist unser Fehler in der Anfangsbedingung, das heißt wir haben den Ball nicht genau auf der Spitze positioniert. Dasselbe kann man sich nun mit einem parabelförmigen Tal vorstellen, wobei der Ball hier nach der kleinsten Abweichung stets wieder in die Senke zurückrollen wird. Er befindet sich dort also in einer stabilen Gleichgewichtslage.

Nun ist die Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ein gut ausgearbeitetes Gebiet. In letzter Zeit haben aber differential-algebraische Gleichungen vor allem in technischen Anwendungsgebieten wie der Elektrotechnik immer mehr an Bedeutung gewonnen. Die allgemeinste Form einer differential-algebraischen Gleichung ist

$$f(t, x, \dot{x}) = 0,$$

wobei $f : G \to \mathbb{C}^m$ auf der offenen Menge $G \subseteq \mathbb{C}^{1+n+n}$ definiert und dort stetig sein soll. Mit der tieferen Analysis dieser Gleichungen soll sich diese Arbeit aber nicht befassen. Stattdessen wollen wir uns eingehend mit der Stabilitätstheorie von Systemen beschäftigen, denen differential-algebraische Gleichungen zu Grunde liegen, wobei wir uns auf zeitinvariante, lineare, homogene, differential-algebraische Gleichungen beschränken. Die hier betrachteten haben die Form

$$E\dot{x} = Ax$$

mit $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Es gibt in der Stabilitätstheorie die verschiedensten Begriffe und Arten von Stabilität. Das nachfolgende Kapitel wird darüber Auskunft geben, welche wir in dieser Arbeit betrachten. Weiterhin werden darin bekannte Resultate der Stabilitätstheorie linearer Differentialgleichungen, die den späteren Untersuchungen zu Grunde liegen, zitiert, um so einen verständlichen und logischen Aufbau der Thematik zu erreichen. Abschließend werden in Kapitel 2 noch die wichtigsten und hier genutzen Ergebnisse der Lyapunov-Theorie linearer Differentialgleichungen vorgestellt. Dabei wird durch die Zitierung der Ergebnisse Lyapunovs das Fundament für die Untersuchung linearer, homogener differential-algebraischer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten-Matrizen geschaffen.

Im dritten Kapitel widmen wir uns dann der Untersuchung dieser Gleichungen, für die auch bereits Resultate existieren, auf die wir uns dann beziehen werden. Im ersten Abschnitt werden die Begriffe der Regularität von Matrix-Paaren und konsistente Anfangswerte eingeführt und erläutert. Im zweiten Abschnitt werden wir auf die Lösungstheorie, das heißt auf die Darstellungsmöglichkeiten und Eigenschaften der Lösungen sowie der Anfangswerte eingehen. In Abschnitt drei wird schließlich die Stabilität der Systeme untersucht. Es wird die verallgemeinerte Lyapunov-Gleichung und deren Einschränkung auf den Unterraum der sogenannten konsistenten Anfangswerte eingeführt, und notwendige sowie hinreichende Bedingungen für die asymptotische Stabilität des betrachteten Systems angegeben werden. In diesem Zusammenhang wird auch die Lösbarkeit der verallgemeinerten Lyapunov-Gleichung diskutiert und die Eindeutigkeit sowie Darstellung einer Lösung erörtert werden.

Im Anhang befindet sich schließlich noch ein Ergebnis zur Lösungstheorie differential-algebraischer Gleichungen. Es wird eine vermutlich neue Darstellungsform der Lösungen erarbeitet, wobei die sogenannten verallgemeinerten Hauptvektoren die algebraische Grundlage bilden.

Kapitel 2

Differentialgleichungen: Stabilität

2.1 Implizite Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wird zunächst allgemein definiert, was wir in dieser Arbeit unter Stabilität verstehen wollen. Die nachfolgenden Definitionen sind dabei in Verallgemeinerung der entsprechenden Definitionen in [1, Kapitel 7.4] entstanden.
Wir betrachten die implizite Differentialgleichung

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{2.1}$$

wobei die Funktion $f : G \to \mathbb{C}^n$ auf der offenen Menge $G \subseteq \mathbb{C}^{1+n+n}$, $G \neq \emptyset$ stetig sein soll. Unter einer *Lösung* der Differentialgleichung wollen wir eine stetig differenzierbare Funktion $x : J \to \mathbb{C}^n$ verstehen, welche der Gleichung genügt, wobei J ein beliebig geartetes Intervall mit $J \times x(J) \times \dot{x}(J) \subseteq G$ sei. Das Definitionsintervall J heißt *rechtsseitig maximal*, wenn für jedes $t_0 \in J$ und jede Lösung $y : \hat{J} \to \mathbb{C}^n$ von (2.1) die Implikation gilt:

$$\Big([t_0, \sup J) \subseteq \hat{J} \wedge x\,|_{[t_0, \sup J)} = y\,|_{[t_0, \sup J)}\Big) \Rightarrow \hat{J} \cap [t_0, \sup \hat{J}) = [t_0, \sup J).$$

Im Rahmen dieser Arbeit lassen wir nur Lösungen mit rechtsseitig maximalem Definitionsintervall als Lösungen der Differentialgleichung zu.
Die Sinnhaftigkeit dieser Festlegung wird anhand folgender Definition klar werden, welche nun die Stabilität einer Lösung von (2.1) charakterisiert.

2.1.1 Definition. Betrachten wir eine auf einem Intervall der Form $(\tau, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ definierte Lösung $x(\cdot)$ des Systems (2.1).

Die Lösung $x(\cdot)$ heißt *stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $t_0 > \tau$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass gilt: Für jeden Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x^0 - x(t_0)\| < \delta$ gilt für jede Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems

$f(t, y, \dot{y}) = 0$, $y(t_0) = x^0$, dass $[t_0, \infty) \subseteq \operatorname{dom}(y)$ und die Abschätzung

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Andernfalls heißt die Lösung $x(\cdot)$ *instabil*.

Die Lösung $x(\cdot)$ heißt *attraktiv*, wenn es zu jedem $t_0 > \tau$ ein $\eta > 0$ gibt derart, dass gilt: Für jeden Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x^0 - x(t_0)\| < \eta$ gilt für jede Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems $f(t, y, \dot{y}) = 0$, $y(t_0) = x^0$, dass $[t_0, \infty) \subseteq \operatorname{dom}(y)$ und die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Die Lösung $x(\cdot)$ heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil und attraktiv ist.

Die Lösung $x(\cdot)$ heißt *exponentiell stabil*, wenn gilt: Es existieren Konstanten $\alpha > 0$, $\beta > 0$, sodass es zu jedem $t_0 > \tau$ ein $\eta > 0$ gibt derart, dass für jeden Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x^0 - x(t_0)\| < \eta$ für jede Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems $f(t, y, \dot{y}) = 0$, $y(t_0) = x^0$ gilt, dass $[t_0, \infty) \subseteq \operatorname{dom}(y)$ und die Abschätzung

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta(t - t_0)} \|y(t_0) - x(t_0)\| \quad \forall\, t \geq t_0.$$

2.1.2 Bemerkung. Betrachten wir die Stabilitätsdefinition. Es wird dabei *nicht* gefordert, dass jedes Anfangswertproblem in der Nähe der betrachteten Lösung lösbar sein muss. Weiterhin muss eine eventuell existierende Lösung auch nicht eindeutig sein. Es wird nur verlangt, dass alle weiteren, in einer Umgebung um die betrachtete Lösung, existierenden Lösungen sich nicht zu weit von dieser entfernen dürfen.

Tatsächlich folgt sogar aus der Stabilität jeder Lösung des Systems (die dann insbesondere kein endliches Definitionsintervall hat) die eindeutige Lösbarkeit jedes Anfangswertproblems, sofern es eine Lösung besitzt.

Weiterhin muss gesagt werden, dass die Einschränkung der Betrachtung auf Lösungen mit rechtsseitig maximalem Definitionsintervall nun deswegen sinnvoll ist, da sonst mit einer Lösung $y : [t_0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ auch jedes $\hat{y} : J \to \mathbb{C}^n$ mit $J \subsetneq [t_0, \infty)$ Lösung wäre und natürlich nicht unbedingt die Bedingung $[t_0, \infty) \subseteq \operatorname{dom}(\hat{y})$ erfüllt, wir also niemals von Stabilität reden könnten.

2.1.3 Bemerkung. Was wir oben als exponentielle Stabilität definiert haben, wird in der Literatur oft auch als *gleichmäßige exponentielle Stabilität* bezeichnet, da die Konstanten α und β weder von den Anfangswerten noch von den Anfangszeiten abhängen.

Weiterhin ist sicherlich aufgefallen, dass bei der exponentiellen Stabilität, im Gegensatz zur asymptotischen, nicht extra gefordert wird, dass die Lösung stabil sein muss. Dies rührt daher, dass die Stabilität der Lösung bereits aus der angegebenen Bedingung folgt, wie jetzt gezeigt wird.

Es sei also $x : (\tau, \infty) \to \mathbb{C}^n$ eine exponentiell stabile Lösung von (2.1). Also existieren $\alpha > 0$, $\beta > 0$, sodass es zu jedem $t_0 > \tau$ ein $\eta > 0$ gibt derart, dass für jedes $x^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x^0 - x(t_0)\| < \eta$ für jede Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems $f(t, y, \dot{y}) = 0$, $y(t_0) = x^0$ gilt, dass $[t_0, \infty) \subseteq \mathrm{dom}(y)$ und die Abschätzung

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \|y(t_0) - x(t_0)\| \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $t_0 > \tau$ beliebig. Wir wählen nun

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\alpha}, \eta \right\}.$$

Dann gilt für jeden Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x^0 - x(t_0)\| < \delta$ für jede Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems $f(t, y, \dot{y}) = 0$, $y(t_0) = x^0$, dass $[t_0, \infty) \subseteq \mathrm{dom}(y)$, da $\|x^0 - x(t_0)\| < \delta \leq \eta$. Weiterhin gilt für jedes $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &\leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \|y(t_0) - x(t_0)\| \\ &< \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \delta \\ &\leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \frac{\varepsilon}{\alpha} \\ &= \varepsilon e^{-\beta(t-t_0)} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

2.2 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir das lineare System

$$\dot{x} = Ax + b(t), \tag{2.2}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist und $b : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ stetig sein soll, und das zugehörige homogene System

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.3}$$

Angewandt auf lineare Systeme stimmen nun die im Abschnitt 2.1 definierten Begriffe von Stabilität, Attraktivität und asymptotischer Stabilität genau mit den in [1] verwendeten Begriffen der Stabilität im Sinne von Lyapunov überein. Darum folgen die nachstehenden Resultate in gleicher Art und Weise.

Zunächst sei dahingehend bemerkt, dass bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens des inhomogenen Systems (2.2) das zugehörige homogene System (2.3) eine wichtige Rolle spielt, wie folgendes Ergebnis zeigt.

2.2.1 Proposition. Alle Lösungen des inhomogenen Systems (2.2) sind stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil bzw. exponentiell stabil genau dann, wenn die triviale Lösung des zugehörigen homogenen Systems (2.3) stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil bzw. exponentiell stabil ist.

Beweis. Mit [1, Satz 7.5.1] folgen die ersten drei Aussagen für den reellen Fall. Im Komplexen verläuft der Beweis analog. Die Beweistechnik lässt sich auch sofort auf die Aussage bezüglich der exponentiellen Stabilität anwenden. □

Aufgrund dieses Resultates ist es sinnvoll, ein lineares System der Form (2.2) als stabil, attraktiv, asymptotisch stabil oder exponentiell stabil zu bezeichnen, wenn die entsprechende Eigenschaft für die triviale Lösung des zugehörigen homogenen Systems gilt. Für die asymptotische und die exponentielle Stabilität, die uns besonders interessieren, bekommen wir noch weitere Charakterisierungen.
Die nachfolgenden beiden Propositionen werden aus [1] zitiert. Sie werden dort für den Fall reellwertiger Systeme bewiesen, es ist aber kein Problem, die Beweisführung auf komplexwertige zu übertragen.

2.2.2 Proposition. [1, Satz 7.5.3] Eine attraktive Lösung des Systems (2.2) ist stets stabil, damit also asymptotisch stabil.

2.2.3 Proposition. [1, Satz 7.5.4] Das System (2.3) ist genau dann

(i) stabil, wenn es ein $\beta > 0$ gibt mit
$$\|e^{At}\| \leq \beta \;\forall\, t \geq 0,$$

(ii) asymptotisch stabil, wenn gilt
$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0.$$

Die bisherigen Ergebnisse erlauben nun die folgenden Korollare, welche häufig auch als Definition benutzt werden.

2.2.4 Korollar. Das System (2.2) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für jede Lösung $x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ des zugehörigen homogenen Systems (2.3) gilt
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Beweis. $(\Leftarrow)$: Aus der gegebenen Bedingung folgt sofort die Attraktivität der trivialen Lösung des homogenen Systems (2.3) und mit Hilfe von Proposition 2.2.1 die Attraktivität jeder Lösung des inhomogenen Systems (2.2) und schließlich mit Proposition 2.2.2 die asymptotische Stabilität.

$(\Rightarrow)$: Ist das System asymptotisch stabil, dann ist das zugehörige homogene System es auch. Also gilt nach Proposition 2.2.3 für eine beliebige Lösung $x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ von (2.3) zu einem beliebigen Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$:
$$x(t) = e^{At}x^0 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
□

2.2.5 Korollar. Das System (2.2) ist genau dann exponentiell stabil, wenn Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ existieren, sodass für jede Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ des zugehörigen homogenen Systems (2.3) zu einem beliebigen Anfangswertepaar $x^0 \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\|x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x^0\| \quad \forall\, t \geq 0.$$

Beweis. $(\Leftarrow):$ Aus der gegebenen Bedingung folgt sofort die exponentielle Stabilität der trivialen Lösung des homogenen Systems (2.3). Mit Hilfe von Proposition 2.2.1 ist dann auch jede Lösung des inhomogenen Systems (2.2) exponentiell stabil.

$(\Rightarrow):$ Sei $x^0 \in \mathbb{C}^n$ beliebig und $x(\cdot)$ die Lösung von (2.3) zu diesem Anfangswert. Da das inhomogene System (2.2) exponentiell stabil ist, ist es auch das homogene System (2.3), also existieren Konstanten $\alpha > 0$, $\beta > 0$, sodass ein $\delta > 0$ existiert und für alle $y^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|y^0\| < \delta$ gilt

$$\|e^{At} y^0\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|y^0\| \quad \forall\, t \geq 0.$$

Wir betrachten nun als Anfangswerte speziell $y^0 = \frac{\delta}{2} e_i$, wobei e_i der $i-$te Einheitsvektor ist, für $i = 1, ..., n$. Dann ist $\left\|\frac{\delta}{2} e_i\right\| < \delta$, also folgt

$$\begin{aligned} & \left\| e^{At} \frac{\delta}{2} e_i \right\| \leq \alpha e^{-\beta t} \left\| \frac{\delta}{2} e_i \right\| && \forall\, t \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, ..., n\} \\ \Rightarrow\quad & \left\| e^{At} e_i \right\| \leq \alpha e^{-\beta t} && \forall\, t \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen jetzt mit $\|v\|_1$ die Betragssummennorm des Vektors $v \in \mathbb{C}^n$ und mit $\|B\|_1$ die Spaltensummennorm der Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann existieren $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ sodass

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &\leq c_1 \|v\|, \\ \|B\| &\leq c_2 \|B\|_1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\|e^{At} e_i\|_1 \leq c_1 \|e^{At} e_i\| \leq c_1 \alpha e^{-\beta t} \quad \forall\, t \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}.$$

Da die Ungleichung also für jeden Spaltenvektor von $e^{At}, t \geq 0$, gilt und die Spaltensummennorm das Maximum der Betragssummennormen der Spaltenvektoren ist, gilt also insbesondere

$$\|e^{At}\| \leq c_2 \|e^{At}\|_1 \leq c_1 c_2 \alpha e^{-\beta t} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Also ergibt sich

$$\|x(t)\| = \|e^{At} x^0\| \leq c_1 c_2 \alpha e^{-\beta t} \|x^0\| \quad \forall\, t \geq 0.$$

□

2.3 Lyapunov-Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir die fundamentalen Ergebnisse von A.M. Lyapunov zur Stabilitätstheorie wiedergeben, die er 1892 in seiner Habilitationsschrift „Das allgemeine Stabilitätsproblem der Bewegung“ [5] veröffentlichte. Hierzu betrachten wir zunächst ein autonomes System der Form

$$\dot{x} = F(x), \tag{2.4}$$

wobei $F : G \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, G offen, Lipschitz-stetig sei und das System die triviale Lösung $x \equiv 0$ besitze. Dann können wir den Begriff der Lyapunov-Funktion für das System (2.4) einführen.

2.3.1 Definition. Eine stetig differenzierbare Funktion $V : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, U offen, $0 \in U$, heißt *Lyapunov-Funktion* für (2.4), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) V ist *positiv definit*, d.h. $V(0) = 0$ und $V(x) > 0 \; \forall \, x \in U \setminus \{0\}$,

(ii) $\forall \, x \in U : \; \big(\dot{V}(x) := V'(x)(F(x)) \in \mathbb{R}$ und $\dot{V}(x) \leq 0\big)$.

Betrachten wir die Definition von $\dot{V}$. Dabei ist die Ableitung von V an einer Stelle $x \in U$ als linearer Operator aufzufassen entsprechend [3, Abschnitt VII.2]. Das heißt, dass $\dot{V}(x)$ der Funktionswert von $V'(x)$ an der Stelle $F(x)$ ist.

Das zentrale Ergebnis von Lyapunov ist nun, dass man auch ohne Verifizierung der in Abschnitt 2.1 angegebenen Bedingungen, also insbesondere ohne Kenntnis der Lösungen von (2.4), auf die Stabilität dieses Systems schließen kann. Aus diesem Grund nennt man dies die direkte Methode von Lyapunov.

Dabei geht man so vor, dass man V entlang einer Lösung $x(\cdot)$ von (2.4) differenziert, wobei sich nach [3, Kapitel VII, Theorem 3.3] für ein $t \in \mathrm{dom}(x)$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = V'(x(t))(\dot{x}(t)) = V'(x(t))(F(x(t))) = \dot{V}(x(t))$$

ergibt. Unter Nutzung der Eigenschaften der Lyapunov-Funktion V lassen sich dann Rückschlüsse auf das Verhalten der Lösungen $x(\cdot)$ ziehen.

2.3.2 Theorem. Betrachte (2.4) und es sei V eine Lyapunov-Funktion für (2.4). Dann ist die triviale Lösung von (2.4) stabil.

Gilt zusätzlich $\dot{V}(0) = 0$ und $\dot{V}(x) < 0 \; \forall \, x \in U \setminus \{0\}$, dann ist die triviale Lösung von (2.4) sogar asymptotisch stabil.

Beweis. Für den rellen Fall, also $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F : G \to \mathbb{R}^n$, sowie $U \subseteq \mathbb{R}^n$, finden sich die Beweise der beiden Aussagen in Form der Sätze 7.9.1 und 7.9.2 in [1]. Für den Fall des $\mathbb{C}^n$ verlaufen die Beweise analog. □

Betrachten wir wieder das autonome, homogene, lineare System (2.3) mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

2.3.3 Lemma. Das System (2.3) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A negative Realteile besitzen. Dabei gibt es zu jedem $\alpha > 0$ mit $\lambda_{max}(A) < -\alpha < 0$ ein $\beta \geq 1$ mit

$$\|e^{At}\| \leq \beta e^{-\alpha t} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Beweis. In [1, Satz 7.5.5(b)] ist die Aussage für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bewiesen. Der Beweis lässt sich jedoch leicht auf den komplexen Fall übertragen. □

Bevor wir nun das grundlegende Theorem für diese Arbeit formulieren, benötigen wir ein Resultat, dessen Herleitung nicht trivial ist.

2.3.4 Lemma. [4, Corollary 4.4.7] Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Die sogenannte *Lyapunov-Gleichung*

$$A^*P + PA = -Q \tag{2.5}$$

besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ für jede vorgegebene Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, wenn $\sigma(A) \cap \overline{\sigma(-A)} = \emptyset$.

Mit obigen Resultaten lässt sich das folgende Theorem aufstellen, dass für uns von zentraler Bedeutung ist.

2.3.5 Theorem. Betrachte das System (2.3). Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) Das System (2.3) ist asymptotisch stabil.

(ii) Für jede hermitesche, positiv definite Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert genau eine hermitesche, positiv definite Matrix $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, welche die Lyapunov-Gleichung (2.5) erfüllt. Diese Matrix hat das Aussehen
$$P = \int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At}\, dt.$$

(iii) Die Realteile der Eigenwerte von A sind alle negativ, also $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^-$.

Beweis. (i)$\Leftrightarrow$(iii): Folgt unmittelbar mit Lemma 2.3.3.

Einen Beweis für die Äquivalenz von (i) und (ii) findet man zum Beispiel in [6, Abschnitt 3.10] für den Fall, dass A eine reelle Matrix ist. Wir wollen hier noch einmal einen ausführlichen Beweis angeben.

(ii)⇒(i): Wir geben uns $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hermitesch, positiv definit, beliebig vor und bekommen dann P mit denselben Eigenschaften, sodass die Lyapunov-Gleichung erfüllt ist. Zunächst stellen wir jetzt fest, dass für beliebiges $x \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned}\overline{x^*Px} &= \overline{\overline{x}^T}\,\overline{P}\overline{x}\\ &= x^T P^T \overline{x}\\ &= (Px)^T\overline{x}\\ &= \overline{x}^T Px\\ &= x^*Px\end{aligned}$$

gilt, also $x^*Px \in \mathbb{R}$. Damit wird die Definition

$$V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x^*Px$$

sinnvoll. Wir wollen nun zeigen, dass V eine Lyapunov-Funktion für (2.3) ist, um dann Theorem 2.3.2 anzuwenden.

Da P positiv definit ist, ist V positiv definit. Des Weiteren sei $x^0 \in \mathbb{C}^n$ beliebig. Wie man schnell nachprüft ist dann für $x \in \mathbb{C}^n$

$$V'(x^0)(x) = x^*Px^0 + (x^0)^*Px.$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot V(x^0) &= (Ax^0)^*Px^0 + (x^0)^*P(Ax^0)\\ &= (x^0)^*(A^*P + PA)x^0\\ &= -(x^0)^*Qx^0.\end{aligned}$$

Es gilt also insbesondere $\dot V(x^0) = -(x^0)^*Qx^0 \in \mathbb{R}$ und damit $\dot V(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und $\dot V(0) = 0$. Somit ist V eine Lyapunov-Funktion für (2.3) und erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 2.3.2, also ist (2.3) asymptotisch stabil.

(i)⇒(ii): Es sei zunächst angemerkt, dass die Lösung von

$$\dot x = Ax, \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{C}^n$$

die Form $x(t) = e^{At}x^0,\ t \geq 0$ hat. Insbesondere ist

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

und

$$Ae^{At} = A\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^it^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^it^i\right)A = e^{At}A.$$

Es sei $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hermitesch, positiv definit, beliebig vorgegeben. Wir zeigen, dass

$$P = \int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At}\, dt$$

eine Lösung der Lyapunov-Gleichung ist. Da das System asymptotisch stabil ist, gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^-$ wie bereits gezeigt wurde, und mit Lemma 2.3.3 existieren dann Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, sodass

$$\|e^{At}\| \leq \beta e^{-\alpha t} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At}\, dt \right\| &\leq \int_0^\infty \|e^{At}\| \|Q\| \|e^{At}\|\, dt \\ &\leq \|Q\| \beta^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\, dt \\ &= \frac{\|Q\|\beta^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

Also ist P wohldefiniert. Weiterhin gilt, da Q hermitesch und positiv definit ist,

$$P^* = \left(\int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At}\, dt \right)^* = \int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At}\, dt = P$$

und für $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$x^* P x = x^* \int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At}\, dt x = \int_0^\infty \underbrace{(e^{At}x)^* Q (e^{At}x)}_{>0}\, dt > 0.$$

Also ist P auch hermitesch und positiv definit. Nun wird gezeigt, dass P eine Lösung der Lyapunov-Gleichung (2.5) ist:

$$\begin{aligned} A^*P + PA &= \int_0^\infty A^*(e^{At})^* Q e^{At}\, dt + \int_0^\infty (e^{At})^* Q e^{At} A\, dt \\ &= \int_0^\infty (e^{At}A)^* Q e^{At} + (e^{At})^* Q e^{At} A\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} e^{At} \right)^* Q e^{At} + (e^{At})^* Q \left(\frac{d}{dt} e^{At} \right)\, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left((e^{At})^* Q e^{At} \right)\, dt \\ &= (e^{At})^* Q e^{At} \Big|_0^\infty = -Q. \end{aligned}$$

Da $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}^-$, haben alle Eigenwerte von $-A$ positive Realteile und es gilt demnach $\sigma(A) \cap \overline{\sigma(-A)} = \emptyset$. Die Eindeutigkeit von P folgt also mit Lemma 2.3.4. □

2.3.6 Bemerkung. Wie man dem Beweissschritt (ii)⇒(i) entnehmen kann, reicht bereits die Existenz hermitescher, positiv definiter Matrizen Q und P, welche die Lyapunov-Gleichung (2.5) erfüllen, aus, um die asymptotische Stabilität des Systems (2.3) zu folgern.

2.3.7 Proposition. Das System (2.3) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn es exponentiell stabil ist.

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 2.3.3 ist (2.3) genau dann asymptotisch stabil, wenn es Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ gibt, sodass

$$\|e^{At}\| \leq \beta e^{-\alpha t} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Für eine Lösung von (2.3) zum Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ bedeutet dies dann

$$\|x(t)\| = \|e^{At}x^0\| \leq \beta e^{-\alpha t}\|x^0\| \quad \forall\, t \geq 0,$$

was nach Korollar 2.2.5 äquivalent zur exponentiellen Stabilität von (2.3) ist. □

Kapitel 3

Differential-algebraische Gleichungen

3.1 Regularität und konsistente Anfangswerte

Betrachte das homogene, lineare, differential-algebraische Gleichungssystem

$$E\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

mit $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Wir werden jetzt die für dieses Kapitel fundamentalen Definitionen angeben und diese anschließend durch einige Beispiele veranschaulichen.

3.1.1 Definition. $x^0 \in \mathbb{C}^n$ heißt *konsistenter Anfangswert* des Systems (3.1), wenn eine Lösung des Anfangswertproblems

$$E\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0$$

existiert.
Das Matrix-Paar (E, A) heißt *regulär*, wenn

$$\det(\lambda E - A) \not\equiv 0.$$

Andernfalls nennt man es *singulär*.

3.1.2 Bemerkung. Wir betrachten ein paar spezielle Fälle.

(i) Sei zunächst $E = 0$ und A singulär. Dann existiert mindestens ein Vektor $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass $Ay = 0$ und damit $A(ty) = tAy = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist die Abbildung $x : \mathbb{R} \to$

$\mathbb{C}^n, t \mapsto ty$ eine stetig differenzierbare Lösung von (3.1) zum Anfangswert 0 und dieser damit konsistent. Offenbar gilt aber nicht $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$, also ist die triviale Lösung des Systems (3.1) in diesem Fall nicht attraktiv. Später werden wir zeigen, dass die Attraktivität von (3.1) die Stabilität impliziert, wir dann also stets von asymptotischer Stabilität sprechen können. Weiterhin existieren zwei unterschiedliche Lösungen des Systems (3.1) zum Anfangswert 0. Insbesondere ist hier auch $\det(\lambda E - A) \equiv 0$.

(ii) Betrachten wir ein weiteres Beispiel. Für

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gilt:} \;\; \det(\lambda E - A) \equiv 0.$$

Hier ist die Lösung aber ebenfalls uneindeutig, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{bedeutet} \quad \dot{x}_1 = x_2,$$

d.h. für einen beliebigen Anfangswert $x^0 = (x^1, x^2)^T \in \mathbb{C}^2$ kann $x_2(\cdot)$ mit $x_2(0) = x^2$ beliebig gewählt werden und $x_1(\cdot)$ ist Lösung von $\dot{x}_1 = x_2$. Da Konstanten beim Differenzieren verschwinden, ist es kein Problem, $x_1(\cdot)$ dann so zu wählen, dass $x_1(0) = x^1$.
Dass eine solche Uneindeutigkeit der Lösung stets für Systeme mit $\det(\lambda E - A) \equiv 0$ besteht, werden wir im folgenden noch zeigen. Zunächst wollen wir aber noch ein Beispiel betrachten.

(iii) Man sieht, dass für

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gilt:} \;\; \det(\lambda E - A) \equiv 1.$$

Die Lösung dieses Systems lautet $(x_1, x_2)^T \equiv (0,0)^T$ und der einzig konsistente Anfangswert ist $(0,0)^T$. Das System ist damit offensichtlich asymptotisch stabil, d.h. jede Lösung ist es. Später wird gezeigt werden, dass Systeme, für die $\det(\lambda E - A) = const \neq 0$ gilt, stets asymptotisch stabil sind. Des Weiteren sieht man daran gut, dass nicht jeder Anfangswert auch immer konsistent sein muss, da hier für keinen der Vektoren $x = (x^1, x^2)^T \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ eine Lösung des Problems existiert.

An dieser Stelle wollen wir noch zwei äquivalente Charakterisierungen der Regularität des Matrix-Paares (E, A) angeben.

3.1.3 Proposition. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (E, A) ist regulär,

(ii) $E\dot{x} = Ax,\ x(0) = 0$ hat eine eindeutige Lösung,

(iii) die Lösung von $E\dot{x} = Ax,\ x(0) = x^0$ zu beliebigem $x^0 \in \mathbb{C}^n$ ist eindeutig, falls sie existiert.

Wir beweisen die Proposition in Abschnitt 3.1, nachdem wir noch weitere Hilfsmittel erarbeitet haben. Jetzt soll aber eine weitere Beobachtung über das Matrix-Paar (E, A) folgen.
Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ derart, dass ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $\det(\lambda E - A) = 0$. Dann ist die Matrix $\lambda E - A$ nicht invertierbar, also existiert ein $x^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass

$$(\lambda E - A)x^0 = 0.$$

x^0 heißt *verallgemeinerter Eigenvektor* zum *verallgemeinerten Eigenwert* λ von (E, A). Für die Funktion

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n, t \mapsto e^{\lambda t}x^0$$

gilt dann

$$E\dot{x}(t) = \lambda E x^0 e^{\lambda t} = Ax^0 e^{\lambda t} = Ax(t)$$

für jedes $t \geq 0$ und $x(0) = x^0$. Also ist $x(\cdot)$ eine Lösung von $E\dot{x} = Ax,\ x(0) = x^0$, der Vektor x^0 folglich ein konsistenter Anfangswert von (3.1).

Das nachfolgende Lemma wird zeigen, was passiert, wenn (E, A) ein singuläres Matrix-Paar ist, also wenn $\det(\lambda E - A) \equiv 0$.

3.1.4 Lemma. Es sei für Matrizen $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ das Matrix-Paar (E, A) singulär. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Das Anfangswertproblem

$$E\dot{x} = Ax, \quad x(0) = 0$$

besitzt eine nicht-triviale Lösung.

(ii) Die triviale Lösung von (3.1) ist nicht attraktiv.

Beweis. Für den Beweis von (i) wird auf [7, Theorem 2.14] verwiesen.
Um (ii) zu zeigen, nehmen wir zunächst an, die triviale Lösung von (3.1) wäre attraktiv. Dann gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass gilt: Für jeden Anfangswert $x^0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x^0\| < \delta$ gilt für jede Lösung $x(\cdot)$ des Anfangswertproblems $E\dot{x} = Ax,\ x(0) = x^0$, dass $[0, \infty) \subseteq \mathrm{dom}(x)$ und die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Sei $\lambda > 0$ fest gewählt. Dann existiert wegen $\det(\lambda E - A) = 0$ ein $x^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x^0\| < \delta$, sodass

$$(\lambda E - A)x^0 = 0.$$

Wie weiter oben bereits gezeigt wurde, ist

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n, t \mapsto e^{\lambda t}x^0$$

stetig differenzierbare Lösung von (3.1) zum konsistenten Anfangswert x^0. Des Weiteren gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t}\|x^0\| = \infty,$$

also ist die triviale Lösung von (3.1) nicht attraktiv, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Es wurden nun zwei Dinge gezeigt. Zum einen, dass das System (3.1) im Falle eines singulären Matrix-Paares (E, A) keine eindeutige Lösung zum konsistenten Anfangswert $x^0 = 0$ besitzt. Zum anderen, dass die triviale Lösung des Systems dann nie attraktiv und somit das System auch nicht asymptotisch stabil sein kann. Allein aufgrund der ersten Tatsache verzichtet man oft auf die Betrachtung singulärer Matrix-Paare. Da wir uns aber gerade auf die Untersuchung der asymptotischen Stabilität konzentrieren wollen, ist die Betrachtung dieser Matrix-Paare also auch von einem weiteren Gesichtspunkt aus unnötig. Die Untersuchungen werden sich entsprechend auf reguläre Matrix-Paare einschränken.

3.2 Lösungstheorie

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Lösungen von (3.1). Als erstes zitieren wir ein Ergebnis von Owens und Debeljkovic [2], in dem sie eine Unterraumfolge konstruieren, welche genau die Menge der konsistenten Anfangswerte liefert.

3.2.1 Theorem. Seien $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für die durch

$$V_0 = \mathbb{C}^n, \quad V_{i+1} = A^{-1}(EV_i) \quad (i \geq 0)$$

definierte Unterraumfolge gilt:

(i) $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots$,

(ii) $\forall\, i \in \mathbb{N}_0 :\ \mathcal{N}(A) \subseteq V_i$,

(iii) $\exists\, k \in \mathbb{N}_0\ \forall\, i \in \mathbb{N}_0 :\ V_{k+i} = V_k$.

Falls (E, A) regulär ist und $k^* := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid V_{k+1} = V_k\}$, dann gilt:

(iv) $\forall\, k \geq k^* :\ V_k \cap \mathcal{N}(E) = \{0\}$,

(v) $x^0 \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann ein konsistenter Anfangswert für (3.1), wenn $x^0 \in V_{k^*}$.

(vi) Zu $x^0 \in V_{k^*}$ existiert genau eine Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ von (3.1) mit $x(0) = x^0$. Diese ist reel-analytisch und es gilt $x([0, \infty)) \subseteq V_{k^*}$.

Beweis. Die Beweise der Aussagen (i)-(iv) finden sich in [2, Lemma 2.1], die für (v) und (vi) in [2, Theorem 2.1]. □

In den folgenden Betrachtungen setzen wir stets voraus, dass V_{k^*} wie unter Theorem 3.2.1 definiert, gegeben ist. Falls das Matrix-Paar (E, A) regulär ist, so gilt, wie Theorem 3.2.1 (v) und (vi) zu entnehmen ist, dass V_{k^*} genau die Menge der konsistenten Anfangswerte des Systems (3.1) ist und jede Lösung dieses Systems sich in V_{k^*} bewegt.
Mit diesem Ergebnis sind wir nun in der Lage Proposition 3.1.3 zu beweisen.

Beweis von Proposition 3.1.3. (i)⇒(iii): Folgt sofort mit Theorem 3.2.1(vi).

(iii)⇒(ii): Die Aussage gilt natürlich insbesondere für $x^0 = 0$, da $0 \in V_{k^*}$.

(ii)⇒(i): Angenommen (E, A) wäre nicht regulär, dann würde nach Lemma 3.1.4(i) eine nicht-triviale Lösung von

$$E\dot{x} = Ax, \quad x(0) = 0$$

existieren. Dieses Anfangswertproblem hätte damit keine eindeutige Lösung im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Das nächste, sehr wichtige Lemma liefert uns die Grundlage für eine Transformation des Systems (3.1) in eine Form, mit der wir leichter umgehen und rechnen können. Der Rest dieses Abschnitts wird auf dieser Transformation aufbauen.

3.2.2 Lemma (Weierstraßsche Normalform)**.** Für $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (E, A) regulär gilt:

(i) Es existieren invertierbare Matrizen $S, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ derart, dass

$$SET = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad SAT = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0, \quad n_1 + n_2 = n,$$

wobei I_{n_1}, I_{n_2} Einheitsmatrizen der Ordnung n_1 bzw. n_2 sind, $J \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ und $N \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$ eine nilpotente Matrix vom Grad p ist, was bedeutet, dass $N^p = 0$ und $N^{p-1} \neq 0$. Weiterhin sind J und N in Jordannormalform.

(ii) A ist genau dann regulär, wenn J regulär ist.

(iii) $\det(\lambda E - A)$ ist ein Polynom vom Grad n_1.

(iv) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert der Matrix J genau dann, wenn $\det(\lambda_0 E - A) = 0$. Weiterhin stimmt die Vielfachheit von λ_0 als Nullstelle von $\det(\lambda E - A)$ mit der algebraischen Vielfachheit von λ_0 als Eigenwert von J überein.

Das nachfolgende Ergebnis liefert einen gewissen (und ausreichenden) Grad an Eindeutigkeit der Weierstraßschen Normalform.

(v) Hat das Matrix-Paar (E, A) zwei Weierstraßsche Normalformen, d.h. existieren invertierbare Matrizen $S_i, T_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ derart, dass

$$S_i E T_i = \begin{pmatrix} I_{n_i} & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad S_i A T_i = \begin{pmatrix} J_i & 0 \\ 0 & I_{m_i} \end{pmatrix}, \quad n_i, m_i \in \mathbb{N}_0, \quad n_i + m_i = n, \quad i = 1, 2$$

wobei $N_i \in \mathbb{C}^{m_i\times m_i}$ eine nilpotente Matrix vom Grad p_i ist und $J_i \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}$. Dann ist $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$ und $p_1 = p_2$ und es existieren invertierbare Matrizen $H_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ und $H_2 \in \mathbb{C}^{m_1\times m_1}$, sodass

$$J_1 = H_1 J_2 H_1^{-1} \quad \text{und} \quad N_1 = H_2 N_2 H_2^{-1}.$$

Beweis. Den Beweis für (i) findet man in [7, Theorem 2.7], den für (v) in [7, Lemma 2.10].
Weiterhin gilt

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} J + n_2,$$

also hat A genau dann vollen Rang, wenn J vollen Rang hat, womit (ii) folgt.
Mit der Darstellung von E und A folgt

$$\begin{aligned}
\det(\lambda E - A) &= \det\left(\lambda S^{-1}\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1} - S^{-1}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} T^{-1}\right) \\
&= \det(S^{-1})\det(T^{-1})\det\left(\begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} - J & 0 \\ 0 & \lambda N - I_{n_2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det(S^{-1})\det(T^{-1})\det(\lambda I_{n_1} - J)\det(\lambda N - I_{n_2}) \\
&= \det(S^{-1})\det(T^{-1})(-1)^{n_1}\det(J - \lambda I_{n_1})(-1)^{n_2} \\
&= (-1)^n \det(S^{-1})\det(T^{-1})\det(J - \lambda I_{n_1}).
\end{aligned}$$

Da $\det(J - \lambda I_{n_1})$ als charakteristisches Polynom der Matrix J immer den Grad n_1 hat, folgt hieraus sofort (iii).
Nun ist $\det(\lambda_0 E - A) = 0$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\det(J - \lambda_0 I_{n_1}) = 0$ und das ist genau dann der Fall, wenn λ_0 ein Eigenwert von J ist. Weiterhin folgt die Gleichheit der Vielfachheiten aus der Gleichheit $\det(\lambda E - A) = (-1)^n \det(S^{-1})\det(T^{-1})\det(J - \lambda I_{n_1})$. Damit ist Aussage (iv) gezeigt. □

Aufgrund von Lemma 3.2.2(v) wird nun folgende Definition sinnvoll.

3.2.3 Definition. Ist in der Weierstraßschen Normalform für das System (3.1) der Block der nilpotenten Matrix N nicht vorhanden, also $n_2 = 0$, so sagt man, dass das System (3.1) den *Index* 0 hat. Andernfalls sei der Grad p der nilpotenten Matrix N als Index des Systems definiert.
Entsprechend ist der Index des Matrixpaares (E, A) definiert durch

$$\operatorname{ind}(E, A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } E \text{ regulär} \\ p, & \text{sonst} \end{cases} \qquad [7, \text{Definition } 2.9].$$

Weiterhin ist der *Nilpotenzindex* ν einer Matrix $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert durch $\nu := \operatorname{ind}(E, I)$ [7, Definition 2.16].

Es ist anzumerken, dass das System genau dann den Index 0 hat, wenn die Matrix E invertierbar ist. Mittels dieser Definition können wir den Begriff der Drazin-Inversen einführen. Die Drazin-Inverse ist eine verallgemeinerte Inverse einer Matrix wie die Pseudoinverse. Sie wird in später geführten Beweisen von Relevanz sein.

3.2.4 Definition. [7, Definition 2.17] Es sei $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Nilpotenzindex ν. Eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, welche die Bedingungen

$$\begin{aligned} EX &= XE, \\ XEX &= X, \\ XE^{\nu+1} &= E^{\nu} \end{aligned}$$

erfüllt, wird *Drazin-Inverse* von E genannt.

3.2.5 Lemma. Für $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gelten folgende Aussagen:

(i) E hat genau eine Drazin-Inverse E^D.

(ii) Ist E regulär, so gilt $E^D = E^{-1}$.

(iii) Für reguläres $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $(T^{-1}ET)^D = T^{-1}E^D T$.

(iv) Besitzt die Matrix E die Darstellung

$$E = C \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} C^{-1}$$

mit regulären Matrizen $C \in \mathbb{C}^{n\times n}, J \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ und nilpotenter Matrix $N \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$ vom Grad p, dann ist

$$E^D = C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}.$$

Beweis. Der Beweis für Aussage (i) findet sich in [7, Theorem 2.19], der für (ii) und (iii) in [7, Lemma 2.20]. Bleibt noch (iv) zu zeigen. Dafür ist zu verifizieren, dass

$$E_0 := C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

die Bedingungen in Definition 3.2.4 erfüllt. Zunächst stellen wir fest, dass

$$E = C \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} C^{-1}$$

und mittels

$$\begin{aligned} S &:= C^{-1} \\ T &:= \left(\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} C^{-1} \right)^{-1} = C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

haben wir mit

$$\begin{aligned} SET &= \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \\ SIT &= C^{-1} I C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Weierstraßsche Normalform des Matrix-Paares (E, I). Da N nilpotent vom Grad p ist, gilt also für den Nilpotenzindex ν von E, dass

$$\nu = \operatorname{ind}(E, I) = p.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} EE_0 &= C \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= C \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} C^{-1} = E_0 E, \\ E_0 E E_0 &= C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= C \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} = E_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_0E^{p+1} &= C\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}C\begin{pmatrix} J^{p+1} & 0 \\ 0 & N^{p+1} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= C\begin{pmatrix} J^{p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= C\begin{pmatrix} J^{p} & 0 \\ 0 & N^{p} \end{pmatrix} C^{-1} = E^p. \end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Drazin-Inversen ist damit $E_0 = E^D$. □

3.2.6 Bemerkung. Wir haben nun das elementare Handwerkszeug für die Rechnungen und Beweise dieses Abschnitts eingeführt. Wir kommen nun auf die zuvor angesprochene Transformation des Systems (3.1) zurück. Mit Hilfe der Weierstraßschen Normalform aus Lemma 3.2.2 und der Substitution $x = Tz$ lässt sich das System (3.1) durch Linksmultiplikation mit S überführen in

$$SET\dot{z} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} z = SATz, \quad z(0) = z^0 \in \mathbb{C}^n. \tag{3.2}$$

Mit $\zeta_1 = (z_1, ..., z_{n_1})^T$ und $\zeta_2 = (z_{n_1+1}, ..., z_n)^T$ lässt sich (3.2) schreiben als

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= J\zeta_1 \\ N\dot{\zeta}_2 &= \zeta_2. \end{aligned}$$

3.2.7 Lemma. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) gelten folgende Aussagen:

(i) $x^0 \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann ein konsistenter Anfangswert von (3.1), wenn $z^0 = T^{-1}x^0$ ein konsistenter Anfangswert von (3.2) ist.

(ii) $T^{-1}V_{k^*}$ ist die Menge der konsistenten Anfangswerte für (3.2) genau dann, wenn V_{k^*} die Menge der konsistenten Anfangswerte für das System (3.1) ist.

(iii) $T^{-1}V_{k^*} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2} \,\middle|\, z_2 = 0 \right\}, \; V_{k^*} = \mathcal{R}\left(T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$

(iv) Sei $x^0 \in V_{k^*}$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$E\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0$$

gegeben durch

$$x(t) = T\begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0, \quad t \geq 0.$$

(v) Sei A invertierbar, dann gilt

$$V_{k^*} = \mathcal{N}\big((A^{-1}E)^D(A^{-1}E) - I\big).$$

Beweis. Sei W die Menge der konsistenten Anfangswerte von (3.2). Sei nun $x^0 \in V_{k^*}$. Sei weiterhin $x : [0,\infty) \to V_{k^*}, t \mapsto x(t)$ die, nach Theorem 3.2.1(vi) eindeutige, Lösung des Anfangswertproblems $E\dot{x} = Ax,\ x(0) = x^0$. Betrachten wir nun die durch die Substitution $z = T^{-1}x$ entstandene Lösung $z : [0,\infty) \to W, t \mapsto z(t)$ von (3.2). Da $z(t) = T^{-1}x(t)$ für alle $t \geq 0$, T^{-1} regulär und x stetig differenzierbar ist, ist z ebenfalls stetig differenzierbar und $z^0 = z(0) = T^{-1}x(0) = T^{-1}x^0$ somit ein konsistenter Anfangswert von (3.2), also $T^{-1}V_{k^*} \subseteq W$.
Andererseits sei nun $z^0 \in W$. Dann gilt für die Lösungen $x(t) = Tz(t), t \geq 0$, und x ist stetig differenzierbar, da T regulär und z stetig differenzierbar, also ist $x^0 = x(0) = Tz(0) = Tz^0$ ein konsistenter Anfangswert von (3.1), und somit $W \subseteq T^{-1}V_{k^*}$. Schließlich ist also $W = T^{-1}V_{k^*}$ und es folgen (i) und (ii).
Um (iii) zu zeigen, stellen wir nun zunächst fest, dass jedes $\zeta_1^0 \in \mathbb{C}^{n_1}$ eine stetig differenzierbare Lösung von

$$\dot{\zeta}_1 = J\zeta_1, \quad \zeta_1(0) = \zeta_1^0 \in \mathbb{C}^{n_1}$$

erzeugt.
Betrachten wir nun das System

$$N\dot{\zeta}_2 = \zeta_2, \quad \zeta_2(0) = \zeta_2^0 \in \mathbb{C}^{n_2}.$$

Da N nach Lemma 3.2.2 in Jordannormalform gegeben ist, ist N eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonale. Damit ist

$$\zeta_{2,i} = \sum_{j=i+1}^{n_2} (N)_{ij}\dot{\zeta}_{2,j}.$$

Insbesondere ist $\zeta_{2,n_2} = 0$ und damit $\zeta_{2,n_2-1} = (N)_{(n_2-1)n_2}\dot{\zeta}_{2,n_2} = 0$. Induktiv folgt mit obiger Feststellung, dass $\zeta_{2,i} = 0$ für alle $i \in \{1,...,n_2\}$ und damit $\zeta_2 = 0$. Das System hat also nur die triviale Lösung und insbesondere ist $\zeta_2^0 = 0$ der einzige konsistente Anfangswert. Jetzt folgt sofort die Darstellung von $T^{-1}V_{k^*}$ in (iii). Die Darstellung von V_{k^*} selbst erhält man so unmittelbar.
Die Aussage (iv) wird bewiesen, indem gezeigt wird, dass $x(\cdot)$ dem Anfangswertproblem genügt und der Eindeutigkeitssatz benutzt wird. Sei also

$$x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^n, t \mapsto T\begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0.$$

Dann gilt für jedes $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
E\dot{x}(t) &= S^{-1}\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1}T\begin{pmatrix} Je^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0 \\
&= S^{-1}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0 \\
&= S^{-1}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} T^{-1}T\begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0 \\
&= Ax(t)
\end{aligned}$$

und mit $T^{-1}x^0 =: \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x(0) = T\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0 = T\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} = x^0.$$

Da $\operatorname{dom}(x) = [0, \infty)$, ist das Definitionsintervall von x auch rechtsseitig maximal, und mit Theorem 3.2.1(vi) folgt, dass x die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist.
Um Aussage (v) zu beweisen, orientieren wir uns am Beweis von [2, Theorem 2.2]. Sei $E_0 := A^{-1}E$. Aufgrund von Lemma 3.2.2(ii) ist J regulär, da A regulär ist. Dann besitzt E_0 die Darstellung

$$E_0 = A^{-1}E = T\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} SS^{-1}\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1} = T\begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Weiter gilt nun

$$\begin{aligned}
V_{k^*} &\overset{\text{(iii)}}{=} \mathcal{R}\left(T\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathcal{R}\left(T\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\right) \\
&= \mathcal{R}\left(T\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\right) \\
&\overset{\text{Lemma 3.2.5(iv)}}{=} \mathcal{R}(E_0^D).
\end{aligned}$$

Sei nun $x \in V_{k^*}$, dann existiert ein $y \in \mathbb{C}^n$, sodass $x = E_0^D y$. Damit ist

$$(E_0^D E_0 - I)x = (E_0^D E_0 - I)E_0^D y = (E_0^D E_0 E_0^D - E_0^D)y = (E_0^D - E_0^D)y = 0.$$

Andererseits sei $x \in \mathbb{C}^n$ derart, dass $(E_0^D E_0 - I)x = 0$. Angenommen nun, dass $x \notin V_{k^*}$, dann gilt für alle $y \in \mathbb{C}^n$, dass $x \neq E_0^D y$. Insbesondere gilt also für $y = E_0 x$, dass

$$x \neq E_0^D E_0 x \quad \Leftrightarrow \quad (E_0^D E_0 - I)x \neq 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit haben wir

$$x \in V_{k^*} \quad \Leftrightarrow \quad \big((A^{-1}E)^D(A^{-1}E) - I\big)x = 0$$

gezeigt, also Aussage (v). □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch eine weitere Darstellung der Lösungen von (3.1) anführen. Das heißt wir geben ein Resultat an, welches eine Basis des Lösungsraums von (3.1) liefert. Zum Verständnis der in diesem Ergebnis verwendeten Begriffe wird auf den Anhang verwiesen, in dem die algebraischen Grundlagen geschaffen werden und das Theorem bewiesen wird.

3.2.8 Theorem. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (E, A) regulär und $n_1 := \deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Sei $\{v_0^1, ..., v_0^{n_1}\}$ eine Basis von V_{k^*} aus verallgemeinerten Hauptvektoren der Stufen $k_1, ..., k_{n_1}$ von (E, A) zu den (nicht notwendig verschiedenen) verallgemeinerten Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_{n_1}$. Für $j \in \{1, ..., n_1\}$ seien weiterhin $v_1^j, ..., v_{k_j-1}^j \in V_{k^*} \setminus \{0\}$ die zu v_0^j gehörigen und den Bedingungen (A.1) genügenden Vektoren. Sei nun für $i \in \{1, ..., n_1\}$

$$x_i(t) := e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{1}{j!} v_j^i t^j, \quad t \geq 0.$$

Dann bildet die Menge $\{x_1(\cdot), ..., x_{n_1}(\cdot)\}$ eine Basis des Lösungsraums von (3.1).

3.3 Stabilität

Wir sind jetzt in der Lage, Attraktivität und asymptotische Stabilität für die zeitinvarianten, linearen, differential-algebraischen Gleichungen zu charakterisieren und Ergebnisse zu erhalten, die die über lineare Differentialgleichungen verallgemeinern.

3.3.1 Bemerkung. Bei den Untersuchungen beschränken wir uns, wie bei autonomen Systemen, auf Lösungen zur Anfangszeit $t = 0$, da Lösungen zu anderen Anfangszeiten $t_0 \in \mathbb{R}$ und zum selben Anfangswert $x^0 \in V_{k^*}$ nur Verschiebungen dieser wären. Denn wie man schnell anhand des Beweises der Lösungsformel in Lemma 3.2.7(iv) sieht, würde sich, mit den Bezeichnungen $x(\cdot\,; 0, x^0)$ für die Lösung zur Anfangszeit $t = 0$ und $x(\cdot\,; t_0, x^0)$ für die Lösung zur Anfangszeit t_0, diese ergeben zu

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x^0) &= T \begin{pmatrix} e^{J(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} x^0 \\ &= x(t - t_0; 0, x^0) \end{aligned}$$

für $t \geq t_0$.

Wir stellen noch fest, dass in dem Fall des Nicht-Vorhandenseins der Matrix J in der Weierstraßschen

Normalform des Matrix-Paares (E, A), also $n_1 = 0$, das System (3.2) nur die triviale Lösung hat. Aufgrund der Transformation $x = Tz$ hat das System (3.1) dann ebenfalls nur die triviale Lösung, und $x^0 = 0$ ist der einzige konsistente Anfangswert. Damit ist das System dann insbesondere stets exponentiell stabil.

3.3.2 Proposition. Betrachte das System (3.1). Das Matrix-Paar (E, A) sei regulär. Dann gilt: Ist die triviale Lösung von (3.1) stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil bzw. exponentiell stabil, so ist jede Lösung von (3.1) stabil bzw. attraktiv bzw. asymptotisch stabil bzw. exponentiell stabil.

Beweis. Wir zeigen die Aussage über die Stabilität:

Sei $\mu(\cdot)$ eine beliebige Lösung von (3.1). Aufgrund von Theorem 3.2.1(vi) ist $[0, \infty) \subseteq \operatorname{dom}(\mu)$ und $\mu(\cdot)$ ist die eindeutige Lösung von (3.1) zum Anfangswert $\mu(0)$, d.h. $\mu(t) = x(t; 0, \mu(0))$ für jedes $t \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die triviale Lösung von (3.1) stabil ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass für jedes $x^0 \in V_{k^*}$ mit $\|x^0\| < \delta$ für die Lösung $x(\cdot\,; 0, x^0)$ von (3.1) zum Anfangswert x^0 die Abschätzung gilt:

$$\|x(t; 0, x^0)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq 0.$$

Sei $\eta \in V_{k^*}$ mit $\|\eta - \mu(0)\| < \delta$ und $x(\cdot\,; 0, \eta)$ die Lösung von (3.1) zum Anfangswert η. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x(t; 0, \eta) - \mu(t)\| &= \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\eta - T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}\mu(0) \right\| \\
&= \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(\eta - \mu(0)) \right\| \\
&= \|x(t; 0, \eta - \mu(0))\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

für jedes $t \geq 0$, da $\|\eta - \mu(0)\| < \delta$.

In analoger Weise beweist man die entsprechenden Aussagen über Attraktivität, asymptotische Stabilität und exponentielle Stabilität. □

Aufgrund von Proposition 3.3.2 ist es sinnvoll, ein System der Form (3.1) als stabil, attraktiv, asymptotisch stabil oder exponentiell stabil zu bezeichnen, wenn die entsprechende Eigenschaft für die triviale Lösung von (3.1) gilt.

3.3.3 Proposition. Betrachte das System (3.1). Das Matrix-Paar (E, A) sei regulär. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) gelten dann folgende Aussagen:

(i) Das System (3.1) ist genau dann attraktiv, wenn entweder $n_1 = 0$ oder das System $\dot{z} = Jz$ attraktiv ist.

(ii) Wenn die triviale Lösung des Systems (3.1) attraktiv ist, so ist sie auch exponentiell stabil.

(iii) Das System (3.1) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn entweder $n_1 = 0$ oder das System $\dot{z} = Jz$ asymptotisch stabil ist.

(iv) Das System (3.1) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für jede Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ des Systems (3.1) gilt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

(v) Das System (3.1) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn es exponentiell stabil ist.

Beweis. Zu (i): Der Fall $n_1 = 0$ ist mit Bemerkung 3.3.1 geklärt. Es wird der andere behandelt.

Zunächst bemerken wir, dass für $x^0 \in V_{k^*}$ und $z^0 \in \mathbb{C}^{n_1}$, die in der Beziehung $x^0 = T \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen, für die Lösung $x(\cdot\,; 0, x^0)$ von (3.1) zum Anfangswert x^0 für jedes $t \geq 0$ gilt:

$$\|x(t; 0, x^0)\| = \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} x^0 \right\| = \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|. \tag{3.3}$$

$(\Rightarrow)$: Die trviale Lösung von (3.1) sei attraktiv, das heißt, es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x^0 \in V_{k^*}$ mit $\|x^0\| < \delta$ für die Lösung $x(\cdot\,; 0, x^0)$ von (3.1) zum Anfangswert x^0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; 0, x^0)\| = 0.$$

Wir betrachten nun $\hat{\delta} := \frac{\delta}{\|T\|}$. Ist nun $z^0 \in \mathbb{C}^{n_1}$ mit $\|z^0\| < \hat{\delta}$, dann gilt für $x^0 := T \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{k^*}$

$$\|x^0\| = \left\| T \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \|T\| \|z^0\| < \delta.$$

Damit ist nach Voraussetzung

$$0 = \lim_{t\to\infty} \|x(t; 0, x^0)\| \overset{(3.3)}{=} \lim_{t\to\infty} \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Damit folgt

$$\lim_{t\to\infty} \left\| e^{Jt} z^0 \right\| = 0,$$

also ist die triviale Lösung von $\dot{z} = Jz$ attraktiv.

$(\Leftarrow)$: Die trviale Lösung von $\dot{z} = Jz$ sei attraktiv, das heißt, es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $z^0 \in \mathbb{C}^{n_1}$ mit $\|z^0\| < \delta$ für die Lösung $z(\cdot) = e^{J\cdot}z^0$ von $\dot{z} = Jz$ zum Anfangswert z^0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|z(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|e^{Jt}z^0\| = 0.$$

Wir betrachten nun $\hat{\delta} := \frac{\delta}{\|T^{-1}\|}$. Ist nun $x^0 \in V_{k^*}$ mit $\|x^0\| < \hat{\delta}$, dann gilt für $\begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} := T^{-1}x^0$

$$\|z^0\| = \left\| \begin{pmatrix} z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\|T^{-1}x^0\right\| \leq \|T^{-1}\|\|x^0\| < \delta.$$

Damit ist nach Voraussetzung

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{Jt}z^0\| = 0,$$

also

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t;0,x^0)\|| \overset{(3.3)}{=} \lim_{t\to\infty} \left\| T \begin{pmatrix} e^{Jt}z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Folglich ist die triviale Lösung von (3.1) attraktiv.

Zu (ii): Der Fall $n_1 = 0$ ist aufgrund von Bemerkung 3.3.1 trivial. Sei also $n_1 > 0$. Wir definieren

$$\Psi : [0,\infty) \to \mathbb{C}^{n\times n}, t \mapsto T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Für beliebiges $s, t \in [0,\infty)$ erfüllt diese Matrix die Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\Psi(t-s)\Psi(s) &= T \begin{pmatrix} e^{J(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}T \begin{pmatrix} e^{Js} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \\
&= T \begin{pmatrix} e^{J(t-s)}e^{Js} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \\
&= T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \Psi(t).
\end{aligned}$$

Sei $x^0 \in V_{k^*}$. Dann gilt für die Lösung $x(\cdot\,;0,x^0)$ von (3.1) zum Anfangswert x^0 für jedes $t \geq 0$

$$x(t;0,x^0) = \Psi(t)x^0.$$

Die triviale Lösung von (3.1) sei nun attraktiv, das heißt, es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x^0 \in V_{k^*}$ mit $\|x^0\| < \delta$ für die Lösung $x(\cdot\,;0,x^0)$ von (3.1) zum Anfangswert x^0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t;0,x^0)\| = 0.$$

Sei $x^0 \in V_{k^*}$ mit $\|x^0\| < \delta$. Dann gilt

$$0 = \lim_{t\to\infty} x(t;0,x^0) = \lim_{t\to\infty} \Psi(t)x^0,$$

also

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = 0.$$

Damit existiert ein $T > 0$, sodass $\|\Psi(T)\| \leq \frac{1}{2}$. Weiter sei

$$\alpha := 2 \max_{t\in[0,T]} \|\Psi(t)\|.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in [0,T): &\qquad \|\Psi(t)\| \leq \frac{\alpha}{2} \\
\forall\, t \in [T,2T): &\qquad \|\Psi(t)\| \leq \|\Psi(t-T)\|\|\Psi(T)\| \leq \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{4} \\
\forall\, t \in [2T,3T): &\qquad \|\Psi(t)\| \leq \|\Psi(t-2T)\|\|\Psi(2T-T)\|\|\Psi(T)\| \leq \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{8} \\
&\qquad \ldots
\end{aligned}$$

Dies lässt sich so fortsetzen und man erhält für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\forall\, t \in [kT,(k+1)T): \quad \|\Psi(t)\| \leq \frac{\alpha}{2^{k+1}}.$$

Damit ist für alle $t \geq 0$

$$\|\Psi(t)\| \leq \alpha 2^{-\frac{t}{T}},$$

denn für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $t \in [kT,(k+1)T)$ gilt

$$\alpha 2^{-\frac{t}{T}} \geq \alpha 2^{-\frac{(k+1)T}{T}} = \frac{\alpha}{2^{k+1}} \geq \|\Psi(t)\|.$$

Also existiert ein $\beta > 0$, sodass für jedes $t \geq 0$ gilt

$$\|x(t;0,x^0)\| \leq \|\Psi(t)\|\|x^0\| \leq \alpha 2^{-\frac{t}{T}}\|x^0\| \leq \alpha e^{-\beta t}\|x^0\|.$$

Da α und β unabhängig vom Anfangswert x^0 sind, ist (3.1) exponentiell stabil.

Zu (iii): Im Fall $n_1 = 0$ ist aufgrund von Bemerkung 3.3.1 alles klar. Betrachten wir also den anderen Fall.

($\Rightarrow$): Wenn (3.1) asymptotisch stabil ist, dann ist es insbesondere attraktiv und mit (i) ist das System $\dot{z} = Jz$ attraktiv. Schließlich folgt mit Proposition 2.2.2 auch die Stabilität des Systems, also die asymptotische Stabilität.

($\Leftarrow$): Wenn nun das System $\dot{z} = Jz$ asymptotisch stabil ist, ist es attraktiv, und somit ist das System (3.1) nach (i) ebenfalls attraktiv, mit Hilfe von (ii) ist es also asymptotisch stabil.

Zu (iv): Falls $n_1 = 0$ ist, dann ist die Aussage aufgrund von Bemerkung 3.3.1 offensichtlich wahr. Sei also $n_1 > 0$.

($\Rightarrow$) : Wenn (3.1) asymptotisch stabil ist, dann ist nach (iii) auch das System $\dot{z} = Jz$ asymptotish stabil. Damit gilt also

$$\lim_{t\to\infty} e^{Jt} = 0$$

und es folgt unmittelbar für beliebiges $x^0 \in V_{k^*}$

$$\lim_{t\to\infty} x(t;0,x^0) = \lim_{t\to\infty} T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}x^0 = 0.$$

($\Leftarrow$) : Aus der gegebenen Bedingung folgt sofort die Attraktivität von (3.1) und mit (ii) die asymptotische Stabilität.

Zu (v): Die Äquivalenz folgt sofort aus Aussage (ii).

□

Damit haben wir eine gute und einfache Charakterisierung der asymptotischen Stabilität wie im Fall von linearen Systemen erhalten, die wir von jetzt an auch ständig nutzen werden. Die nachfolgende Proposition ist auch in [2] zu finden als Proposition 2.1. Allerdings werden wir sie hier anders beweisen, indem wir die vorangehenden Resultate benutzen.

3.3.4 Proposition. Eine notwendige Bedingung für die asymptotische Stabilität von (3.1) ist die Invertierbarkeit der Matrix A.

Beweis. Sei (3.1) asymptotisch stabil. Nehmen wir an, A wäre nicht invertierbar. Aufgrund dessen ist $n_1 > 0$, der Block der Matrix J in der Weierstraßschen Normalform von (E, A) existiert also. Andernfalls wäre $A = S^{-1}T^{-1}$ regulär im Widerspruch zur Voraussetzung. Aufgrund von Lemma 3.2.2 ist aber J nicht regulär, besitzt also den Eigenwert 0. Damit kann das System $\dot{z} = Jz$ nicht asymptotisch stabil sein aufgrund von Theorem 2.3.5. Mit Proposition 3.3.3(iii) folgt dann, dass das System (3.1) nicht asymptotisch stabil ist, was einen Widerspruch ergibt. □

Wir formulieren und beweisen nun das erste zentrale Theorem dieses Abschnitts.

3.3.5 Theorem. Betrachte das System (3.1). Das Matrix-Paar (E, A) sei regulär. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) Das System (3.1) ist asymptotisch stabil.

(ii) Es existiert eine hermitesche Matrix Q, für die

$$x^*Qx > 0 \quad \text{für alle } x \in V_{k^*} \setminus \{0\} \tag{3.4}$$

gilt und die *verallgemeinerte Lyapunov-Gleichung*

$$A^*PE + E^*PA = -Q \tag{3.5}$$

besitzt eine Lösung in Form einer hermiteschen, positiv definiten Matrix P.

(iii) $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda E - A) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^-$

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii): Diesen Teil des Beweises findet man auch in [2, Theorem 2.2]. Zur Vollständigkeit und für das Gesamtverständnis ist er hier nochmal in ausführlicherer Form aufgeschrieben.
Ziel ist die Konstruktion von Matrizen P und Q, sodass (3.4) und (3.5) erfüllt sind. Mit Proposition 3.3.4 folgt nun die Invertierbarkeit von A. Also können wir $E_0 := A^{-1}E$ definieren. Weiterhin betrachten wir eine Weierstraßsche Normalform von (E, A) mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i). Aufgrund von Lemma 3.2.2(ii) ist J regulär, da A regulär ist. Wie aus dem Beweis von Lemma 3.2.7(v) zu entnehmen ist, ist

$$E_0 = T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1} \quad \text{und damit} \quad E_0^D = T \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Betrachten wir nun für beliebiges $\eta > 0$ die Matrix

$$\tilde{E} = E_0 + \eta(E_0^D E_0 - I).$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\sigma(\tilde{E}) \subseteq \mathbb{C}^-$. Da

$$E_0^D E_0 = T \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

ist offenbar

$$\tilde{E} = T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N - \eta I_{n_2} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Aus der asymptotischen Stabilität von (3.1) folgt nun mit Hilfe von Proposition 3.3.3(iii), dass entweder $n_1 = 0$ oder das System $\dot{z} = Jz$ asymptotisch stabil ist. Falls $n_1 > 0$, so haben alle Eigenwerte von J (und damit alle von J^{-1}) negative Realteile.
Weiterhin ist $N - \eta I_{n_1} = I_{n_1}(-\eta I_{n_1} + N)I_{n_1}^{-1}$ eine Jordansche Normalform der Matrix $N - \eta I_{n_1}$, alle Eigenwerte dieser Matrix stehen also auf der Diagonale von $-\eta I_{n_1}$ und es ist $\sigma(N - \eta I_{n_1}) = \{-\eta\}$. Sowohl für $n_1 = 0$, als auch für $n_1 > 0$ erhalten wir somit $\sigma(\tilde{E}) \subseteq \mathbb{C}^-$. Damit ist das System

$$\dot{x} = \tilde{E}x$$

asymptotisch stabil, und mit Theorem 2.3.5 folgt, dass es für eine beliebig vorgegebene hermitesche, positiv definite Matrix $\tilde{Q}$ eine hermitesche, positiv definite Matrix $\tilde{P}$ gibt, welche die Lyapunovgleichung

$$\tilde{E}^*\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{E} = -\tilde{Q}$$

löst. Wir wählen eine beliebige Matrix $\tilde{Q}$ mit eben diesen Eigenschaften, und erhalten dazu die Lösung $\tilde{P}$ der Lyapunovgleichung.
Da

$$\tilde{E}^*\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{E} = E_0^*\tilde{P} + \eta(E_0^D E_0 - I)^*\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{E}_0 + \eta\tilde{P}(E_0^D E_0 - I),$$

bekommt man

$$E_0^*\tilde{P} + \tilde{P}E_0 = -Q := -\tilde{Q} - \eta(E_0^D E_0 - I)^*\tilde{P} - \eta\tilde{P}(E_0^D E_0 - I).$$

Nun ist $P := (A^*)^{-1}\tilde{P}A^{-1}$ Lösung der verallgemeinerten Lyapunovgleichung (3.5), denn

$$\begin{aligned} A^*PE + E^*PA &= A^*((A^*)^{-1}\tilde{P}A^{-1})E + E^*((A^*)^{-1}\tilde{P}A^{-1})A \\ &= \tilde{P}A^{-1}E + (A^{-1}E)^*\tilde{P} = \tilde{P}E_0 + E_0^*\tilde{P} = -Q. \end{aligned}$$

Weiterhin ist P offensichtlich hermitesch, da

$$P^* = ((A^*)^{-1}\tilde{P}A^{-1})^* = (A^*)^{-1}\tilde{P}^*A^{-1} = (A^*)^{-1}\tilde{P}A^{-1} = P$$

und auch positiv definit, da A reguläre Matrix ist, also

$$x^*Px = (A^{-1}x)^*\tilde{P}(A^{-1}x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

aufgrund der positiven Definitheit von $\tilde{P}$.
Es bleibt nun noch zu zeigen, dass Q hermitesch ist und (3.4) erfüllt. Das erstere ist wieder klar, da

$$Q^* = -\tilde{Q}^* - \eta\tilde{P}^*(E_0^D E_0 - I) - \eta(E_0^D E_0 - I)^*\tilde{P} = Q.$$

Mit Lemma 3.2.7(v) folgt sofort für $x \in V_{k^*} \setminus \{0\}$, dass $(E_0^D E_0 - I)x = 0$, also

$$x^*Qx = x^*\tilde{Q}x + \eta((E_0^D E_0 - I)x)^*\tilde{P}x + \eta x^*\tilde{P}(E_0^D E_0 - I)x = x^*\tilde{Q}x > 0,$$

da $\tilde{Q}$ positiv definit ist.

(ii)⇒(iii): Zunächst zeigen wir die Invertierbarkeit von A. Unter der Gültigkeit der verallgemeinerten Lyapunov-Gleichung (3.5) ist $(Ax)^*PEx + (Ex)^*PAx = -x^*Qx < 0$ für alle $x \in V_{k^*} \setminus \{0\}$. Angenommen A wäre nicht invertierbar, dann ist $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$, und aufgrund von Theorem 3.2.1(ii) gilt

$$\mathcal{N}(A) \setminus \{0\} \subseteq V_{k^*} \setminus \{0\}.$$

Also existiert ein $x \in V_{k^*} \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$, und $(Ax)^* PEx + (Ex)^* PAx = 0$ liefert den Widerspruch zur Voraussetzung.
Wir werden nun wieder die Weierstraßsche Normalform mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) für das System (3.1) verwenden. Ist dabei $n_1 = 0$, so hat $\det(\lambda E - A)$ den Grad 0 nach Lemma 3.2.2(iii), besitzt also keine Nullstellen. In diesem Fall ist (iii) jedoch stets erfüllt. Sei also $n_1 > 0$.
Damit existiert der Block der Matrix J und da A invertierbar ist, ist J invertierbar. Damit kann man nun die verallgemeinerte Lyapunovgleichung ein wenig umformen. Wir definieren zunächst

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} := (S^*)^{-1} P S^{-1}, \quad \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} := T^* Q T$$

mit hermiteschen Matrizen $P_{11}, Q_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$, $P_{22}, Q_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ und Matrizen $P_{12}, Q_{12} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$. Die Definition ist offensichtlich sinnvoll aufgrund der Hermizität von $(S^*)^{-1} P S^{-1}$ und $T^* Q T$. Wir zeigen nun, dass

$$(3.5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P_{11} J + J^* P_{11} & = & -Q_{11} \\ P_{12} + J^* P_{12} N & = & -Q_{12} \\ N^* P_{22} + P_{22} N & = & -Q_{22} \end{cases} . \tag{3.6}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
A^* P E + E^* P A = -Q \quad &\Leftrightarrow \quad (A^{-1})^* A^* P E A^{-1} + (A^{-1})^* E^* P A A^{-1} = -(A^{-1})^* Q A^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad P(EA^{-1}) + (EA^{-1})^* P = -(A^{-1})^* Q A^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} S \right)^* P \\
&\qquad +P \left(S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} S \right) \\
&\qquad = - \left(T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} S \right)^* Q \left(T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} S \right) \\
&\Leftrightarrow \quad S^* \begin{pmatrix} (J^{-1})^* & 0 \\ 0 & N^* \end{pmatrix} (S^*)^{-1} P + P S^{-1} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} S \\
&\qquad = -S^* \begin{pmatrix} (J^{-1})^* & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} T^* Q T \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} S
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Die Einführung der oben bereits vorweg definierten Matrizen wird nun sinnvoll. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
(3.7) \quad \Leftrightarrow \quad & S^* \begin{pmatrix} (J^{-1})^* & 0 \\ 0 & N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} S + S^* \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} S \\
& = -S^* \begin{pmatrix} (J^{-1})^* & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} S \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} (J^{-1})^* & 0 \\ 0 & N^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \\
& = - \begin{pmatrix} (J^{-1})^* & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} (J^{-1})^* P_{11} & (J^{-1})^* P_{12} \\ N^* P_{12}^* & N^* P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} J^{-1} & P_{12} N \\ P_{12}^* J^{-1} & P_{22} N \end{pmatrix} \\
& = - \begin{pmatrix} (J^{-1})^* Q_{11} J^{-1} & (J^{-1})^* Q_{12} \\ Q_{12}^* J^{-1} & Q_{22} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} (J^{-1})^* P_{11} + P_{11} J^{-1} & = -(J^{-1})^* Q_{11} J^{-1} \\ (J^{-1})^* P_{12} + P_{12} N & = -(J^{-1})^* Q_{12} \\ N^* P_{12}^* + P_{12}^* J^{-1} & = -Q_{12}^* J^{-1} \\ N^* P_{22} + P_{22} N & = -Q_{22} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Äquivalenz (3.6) gezeigt.
Um diesen Schritt des Beweises abzuschließen, werden wir im folgenden zeigen, dass die erste der drei Gleichungen auf der rechten Seite von (3.6) eine Lyapunovgleichung für J darstellt. Es wird sich herausstellen, dass die Matrizen P_{11} und Q_{11} hermitesch und positiv definit sind. Die anderen beiden Gleichungen benötigen wir im Moment nicht, sie werden aber später noch von Nutzen sein.
Nun gilt aufgrund der positiven Definitheit von P, dass offenbar auch $(S^{-1})^* P S^{-1}$ positiv definit ist. Des Weiteren ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ mit $x_1 \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\}$

$$
\begin{aligned}
0 < x^*(S^*)^{-1} P S^{-1} x \quad &= \quad (x_1^*, 0^*) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \quad (x_1^* P_{11}, x_1^* P_{12}) \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \quad x_1^* P_{11} x_1
\end{aligned}
$$

Damit folgt sofort, dass P_{11} positiv definit ist.

Wir zeigen nun:

$$x^*Qx > 0 \;\forall\, x \in V_{k^*} \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad z_1^* Q_{11} z_1 > 0 \;\forall\, z_1 \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\}. \tag{3.8}$$

Nach Lemma 3.2.7(iii) ist

$$V_{k^*} = \mathcal{R}\left(T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \right).$$

Jetzt setzen wir

$$G := T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

und stellen fest, dass

$$x \in V_{k^*} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{R}(G) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y \in \mathbb{C}^n : x = Gy.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x^*Qx \quad &= \quad y^* \left(T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \right)^* Q \left(T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \right) y \\
&= \quad (T^{-1}y)^* \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*QT \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (T^{-1}y) \\
&\overset{z=T^{-1}y}{=} \quad z^* \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \\
&= \quad (z_1^*, 0) \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \quad z_1^* Q_{11} z_1.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt mit diesen Bezeichnungen

$$x \in V_{k^*} \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{N}(G) \quad \Leftrightarrow \quad z \in T^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{N}(G)).$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
T^{-1}(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{N}(G)) \quad &= \quad \{T^{-1}x \mid x \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{N}(G)\} \\
&= \quad \{y \in \mathbb{C}^n \mid y = T^{-1}x, x \in \mathbb{C}^n, x \notin \mathcal{N}(G)\} \\
&= \quad \{y \in \mathbb{C}^n \mid y \notin T^{-1}\mathcal{N}(G)\} \\
&= \quad \mathbb{C}^n \setminus (T^{-1}\mathcal{N}(G))
\end{aligned}$$

aufgrund der Regularität von T. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
T^{-1}\mathcal{N}(G) &= T^{-1}\{x \in \mathbb{C}^n \mid Gx = 0\} \\
&= \{T^{-1}x \mid x \in \mathbb{C}^n, Gx = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{C}^n \mid y = T^{-1}x, Gx = 0\} \\
&= \{y \in \mathbb{C}^n \mid GTy = 0\} \\
&= \left\{ y \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}Ty = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2} \,\middle|\, T \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2} \,\middle|\, y_1 = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\begin{aligned}
x^*Qx > 0 \,\forall\, x \in V_{k^*} \setminus \{0\} \quad &\Leftrightarrow \quad z_1^*Q_{11}z_1 > 0 \,\forall \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2} \setminus (T^{-1}\mathcal{N}(G)) \\
&\Leftrightarrow \quad z_1^*Q_{11}z_1 > 0 \,\forall\, z_1 \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\},
\end{aligned}$$

womit die Äquivalenz (3.8) gezeigt wurde. Es folgt sofort, dass Q_{11} positiv definit sein muss. Die erste Gleichung auf der rechten Seite von (3.6) stellt eine Lyapunovgleichung für J dar, und da P_{11} und Q_{11} hermitesche, positiv definite Matrizen sind, ist diese erfüllt, also gilt nach Bemerkung 2.3.6 $\sigma(J) \subseteq \mathbb{C}^-$ und aus der Aussage von Lemma 3.2.2(iv), dass die Eigenwerte von J genau mit den Nullstellen von $\det(\lambda E - A)$ übereinstimmen, folgt somit, dass alle Nullstellen dieses Polynoms negative Realteile haben.

(iii)⇒(i): Unter Verwendung der Weierstraßschen Normalform mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) für das System (3.1) gilt, nach Aussage von Lemma 3.2.2(iv), aufgrund der Voraussetzung, dass alle Eigenwerte der Matrix J negative Realteile haben. Damit ist das System $\dot{z} = Jz$ asymptotisch stabil und mit Proposition 3.3.3(iii) auch das System (3.1).
Im Fall $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda E - A) = 0\} = \emptyset$ ist $n_1 = 0$, nach Lemma 3.2.2(iii), und damit besitzt (3.1) nur die triviale Lösung nach Bemerkung 3.3.1, ist also ebenfalls asymptotisch stabil. □

3.3.6 Bemerkung. Eine interessante Tatsache, die noch einmal hervorgehoben werden sollte, ist, dass aus der Existenz zweier Matrizen P und Q mit den in Theorem 3.3.5 angegebenen Eigenschaften, welche die verallgemeinerte Lyapunov-Gleichung lösen, sofort die Invertierbarkeit der Matrix A folgt. Dies wurde zu Anfang des zweiten Beweisschrittes gezeigt.

Nach Aussage von Theorem 3.3.5 ist die asymptotische Stabilität des Systems (3.1) dazu äquivalent, dass eine entsprechende Matrix Q existiert und die zugehörige, verallgemeinerte Lyapunovgleichung eine Lösung hat. Nun möchte man aber das Ergebnis haben, dass man eine beliebige Matrix Q mit den entsprechenden Eigenschaften vorgeben kann, für diese die Lösung der verallgemeinerten Lyapunovgleichung findet und schließlich die asymptotische Stabilität bekommt.
Dass dies im Fall von Index 0-Systemen funktioniert, ist klar aufgrund von Theorem 2.3.5. Wir werden im folgenden zeigen, dass es tatsächlich nur für diese funktioniert, indem wir beweisen, dass bereits die Gültigkeit der Gleichung (3.5) für zwei hermitesche, positiv definite Matrizen P und Q impliziert, dass das System (3.1) den Index 0 haben muss.
Dieses Resultat kann zum Beispiel auch in [9, Theorem 4.4] gefunden werden.

3.3.7 Proposition. Die verallgemeinerte Lyapunovgleichung (3.5) habe für eine hermitesche, positiv definite Matrix Q eine hermitesche, positiv definite Lösung P.
Dann hat das System (3.1) den Index 0.

Beweis. Wir verwenden wieder die Weierstraßsche Normalform mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) für das System (3.1). Wie im Beweis von Theorem 3.3.5 betrachten wir

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^* & P_{22} \end{pmatrix} := (S^*)^{-1} P S^{-1}, \quad \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} := T^* Q T.$$

Aufgrund dieser Definition ist klar, dass P_{11}, P_{22}, Q_{11} und Q_{22} hermitesch sind. Im zweiten Beweisschritt von Theorem 3.3.5 wurde gezeigt, dass P_{11} positiv definit ist. Auf die gleiche Art und Weise lässt sich zeigen, dass P_{22}, Q_{11} und Q_{22} positiv definit sind.
Wir nehmen an, dass das System nicht den Index 0 hat, also dass $n_2 > 0$ und der Block der nilpotenten Matrix N in der Weierstraßschen Normalform somit existiert. Im zweiten Beweisschritt von Theorem 3.3.5 wurde bereits die Äquivalenz (3.6) gezeigt. Dass n_1 auch den Wert 0 haben kann, und somit die ersten beiden Gleichungen auf der rechten Seite eventuell nicht existieren, ist an dieser Stelle nicht von Belang. Nach Lemma 3.2.2(i) befindet sich N in Jordannormalform, ist also insbesondere eine strenge obere Dreiecksmatrix, was bedeutet, dass N^* eine strenge untere Dreiecksmatrix ist. In Konsequenz ist die erste Zeile von $N^* P_{22}$ stets eine Nullzeile und die erste Spalte von $P_{22} N$ stets eine Nullspalte also $(N^* P_{22} + P_{22} N)_{11} = 0$. Da aber Q_{22} positiv definit ist, ist das erste Diagonalelement dieser Matrix eine positive reelle Zahl, d.h. $-(Q_{22})_{11} < 0$. Dies bedeutet, dass die Gleichung

$$N^* P_{22} + P_{22} N = -Q_{22}$$

nicht erfüllt ist, also erhalten wir hier einen Widerspruch. Das System (3.1) muss folglich den Index 0 haben. $\square$

Aufgrund dieses Resultates liegt es nahe die verallgemeinerte Lyapunov-Gleichung nicht mehr in der Form von (3.5) zu betrachten, sondern diese nur noch auf der Menge der konsistenten Anfangswerte.

Dass man mit diesem Vorgehen aus der Gültigkeit der eingeschränkten Gleichung bereits alle notwendigen Informationen erhält, um die asymptotische Stabilität folgern zu können, legt bereits die Tatsache nahe, dass wir im zweiten Beweisschritt von Theorem 3.3.5 von den drei Gleichungen auf der rechten Seite von (3.6) auch nur die erste, welche diese Einschränkung charakterisiert, wie wir sehen werden, gebraucht haben.
Der erste Schritt zu dieser Einschränkung wurde bereits in [2, Theorem 2.3] gegangen. Die Aussage ist dort, dass das System (3.1) genau dann asymptotisch stabil ist, wenn die Matrix A invertierbar ist und eine hermitesche, positiv definite Matrix P existiert, sodass

$$x^*(A^*PE + E^*PA)x = -x^*x \ \ \forall\, x \in V_{k^*}.$$

Wir werden in diese Richtung weiter gehen, und die Theorie dazu weiter verfeinern, vor allem indem wir die Voraussetzungen, unter denen die asymptotische Stabilität folgt, stark abschwächen werden.

3.3.8 Theorem. Wenn das System (3.1) asymptotisch stabil ist, dann besitzt für eine beliebige hermitesche Matrix Q mit (3.4) die Gleichung

$$x^*(A^*PE + E^*PA)x = -x^*Qx \ \ \forall\, x \in V_{k^*} \tag{3.9}$$

eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix P als Lösung.
Andererseits sei Q eine hermitesche Matrix mit (3.4) und P eine hermitesche, positiv semidefinite Lösung von (3.9). Dann ist das System (3.1) asymptotisch stabil.

Beweis. Um die erste Aussage zu zeigen, betrachten wir die Weierstraßsche Normalform mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) für das System (3.1). Aufgrund der asymptotischen Stabilität des Systems (3.1) ist A insbesondere regulär und damit laut Lemma 3.2.2 auch J regulär. Wie im Beweis Proposition 3.3.7 gezeigt, existieren nun Matrizen $Q_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}, Q_{22} \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}, Q_{12} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_2}$ mit $Q_{11} = Q_{11}^*, Q_{22} = Q_{22}^*$ und Q_{11} positiv definit, derart dass

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} = T^*QT.$$

Da das System (3.1) asymptotisch stabil ist, folgt mit Theorem 3.3.5, dass $\mathrm{Re}(\lambda_0) < 0$ für alle Nullstellen λ_0 von $\det(\lambda E - A)$. Nach Lemma 3.2.2 stimmen diese Nullstellen gerade mit den Eigenwerten der Matrix J überein, also gilt $\sigma(J) \subseteq \mathbb{C}^-$. Damit existiert nach Theorem 2.3.5 eine hermitesche, positiv definite Lösung $P_{11} \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ der Lyapunovgleichung

$$P_{11}J + J^*P_{11} = -Q_{11}.$$

Wir zeigen, dass

$$P := S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

eine Lösung von (3.9) ist. Es ist sofort klar, dass P hermitesch ist. Des Weiteren ist P auch positiv semidefinit, denn

$$\begin{aligned} x^*Px \geq 0 \,\forall\, x \in \mathbb{C}^n \quad &\Leftrightarrow \quad x^*S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Sx \geq 0 \,\forall\, x \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow \quad y \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \geq 0 \,\forall\, y \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow \quad y_1^* P_{11} y_1 \geq 0 \,\forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}. \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen, dass P (3.9) genügt. Wie schon im zweiten Beweisschritt von Theorem 3.3.5 setzen wir

$$G := T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

und stellen mit Lemma 3.2.7(iii) fest, dass

$$x \in V_{k^*} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{R}(G) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y \in \mathbb{C}^n : x = Gy.$$

Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} & P_{11}J + J^*P_{11} = -Q_{11} \\ \Leftrightarrow\ & y_1^*(P_{11}J + J^*P_{11})y_1 = -y_1^* Q_{11} y_1 \,\forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2} \\ \Leftrightarrow\ & y^* \left(\begin{pmatrix} P_{11}J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J^*P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) y = -y^* \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \,\forall\, y \in \mathbb{C}^n \\ \Leftrightarrow\ & y^* \left(\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} J^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) y \\ & = -y^* \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \,\forall\, y \in \mathbb{C}^n \\ \Leftrightarrow\ & y^* \left(\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N^* \end{pmatrix} (S^*)^{-1} P S^{-1} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J^* & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} (S^*)^{-1} P S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) y \\ & = -y^* \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \,\forall\, y \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & y^* \left(\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (ET)^* P (AT) \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (AT)^* P (ET) \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) y \\
& = -y^* \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \ \forall\, y \in \mathbb{C}^n \\
\Leftrightarrow\quad & (T^{-1}y)^* \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*(E^*PA + A^*PE)T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (T^{-1}y) \\
& = -(T^{-1}y)^* \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^*QT \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (T^{-1}y) \ \forall\, y \in \mathbb{C}^n \\
\Leftrightarrow\quad & (Gy)^*(E^*PA + A^*PE)(Gy) = -(Gy)^*Q(Gy) \ \forall\, y \in \mathbb{C}^n \\
\Leftrightarrow\quad & x^*(E^*PA + A^*PE)x = -x^*Qx \ \forall\, x \in V_{k^*}
\end{aligned}$$

Um die zweite Aussage zu zeigen, haben wir uns an dem Beweis von [9, Theorem 4.6] orientiert. Zunächst stellen wir fest, dass (3.1) im Fall $n_1 = 0$ asymptotisch stabil ist, nach Bemerkung 3.3.1. Sei also $n_1 > 0$. Dann existiert der Block der Matrix J und wir zeigen, dass $\sigma(J) \subseteq \mathbb{C}^-$. Betrachten wir dazu einen beliebigen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von J. Dann existiert ein Eigenvektor $y \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\}$ derart, dass $Jy = \lambda y$. Nach Lemma 3.2.7 (iii) ist dann

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \in T^{-1}V_{k^*} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad T \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{k^*} \setminus \{0\}.$$

Setzen wir nun

$$x := T \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\begin{aligned}
(\lambda E - A)x &= \lambda ET \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - AT \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \lambda S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - S^{-1} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \lambda S^{-1} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - S^{-1} \begin{pmatrix} Jy \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda y - Jy \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda y - \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun

$$\lambda E x = A x$$

und, da $x \in V_{k^*} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} 0 > -x^* Q x &= x^*(E^* P A + A^* P E)x \\ &= (Ex)^* P (Ax) + (Ax)^* P (Ex) \\ &= \lambda (Ex)^* P (Ex) + \overline{\lambda} (Ex)^* P (Ex) \\ &= 2\mathrm{Re}(\lambda)(Ex)^* P (Ex). \end{aligned}$$

Da P positiv semidefinit ist muss somit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ gelten, und da λ ein beliebiger Eigenwert von J war, gilt also $\sigma(J) \subseteq \mathbb{C}^-$. Damit ist das System $\dot{z} = Jz$ asymptotisch stabil und mit Proposition 3.3.3(iii) folgt die asymptotische Stabilität des Systems (3.1). □

3.3.9 Bemerkung. Man kann, mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Theorem 3.3.8, die Bedingung (3.9) auch als Matrixgleichung schreiben. Mit

$$G := T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} x^*(A^* P E + E^* P A)x = -x^* Q x \;\; \forall\, x \in V_{k^*} &\Leftrightarrow x^*(A^* P E + E^* P A)x = -x^* Q x \;\; \forall\, x \in \mathcal{R}(G) \\ &\Leftrightarrow (Gy)^*(A^* P E + E^* P A)(Gy) = -(Gy)^* Q (Gy) \;\; \forall\, y \in \mathbb{C}^n \\ &\Leftrightarrow G^*(A^* P E + E^* P A)G = -G^* Q G. \end{aligned}$$

In Bezug auf die erste Aussage von Theorem 3.3.8 sieht man, dass nicht nur die Matrix

$$P := S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S,$$

sondern auch

$$P' := S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} S$$

für jede hermitesche, positiv semidefinite Matrix P_{22} Lösung von (3.9) ist und den Anforderungen genügt. Die Lösung ist also nicht eindeutig.

In Anlehnung an [9, Theorem 4.13] formulieren wir daher eine zusätzliche Bedingung, unter welcher genau eine Lösung existiert und stellen zudem noch fest, wie diese aussieht. Bei letzterem wird auffallen, dass das Aussehen der Lösung große Ähnlichkeit mit dem bekannten Fall hat, in dem die Matrix E regulär ist, was aber nicht weiter verblüffend ist.

3.3.10 Proposition. Betrachte die Weierstraßsche Normalform für das System (3.1) mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i). Es seien

$$G := T \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \qquad H := S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

und Q eine beliebig gegebene hermitesche Matrix mit (3.4).
Wenn das System (3.1) asymptotisch stabil ist, dann gibt es genau eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix P, welche den Gleichungen

$$G^*(E^*PA + A^*PE)G = -G^*QG \tag{3.10}$$

$$\text{und} \qquad P = PH \tag{3.11}$$

genügt. Diese Matrix ist gegeben durch

$$P = \int_0^\infty \left(T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S \right)^* Q \left(T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S \right) dt. \tag{3.12}$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis von Theorem 3.3.8. Es wird zunächst gezeigt, dass es genau eine Matrix P gibt, welche den Gleichungen (3.10) und (3.11) genügt. Dass es mindestens eine gibt, die der ersten Gleichung genügt, folgt sofort mit Theorem 3.3.8. Im Beweis wurde selbige durch

$$P := S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

definiert. Sie ist also hermitesch und positiv semidefinit. Wir stellen nun fest, dass auch

$$PH = S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} SS^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = P$$

gilt, und die Matrix P somit auch der zweiten Gleichung genügt. Es gibt also mindestens eine Lösung des Gleichungssystems.
Seien nun P_1 und P_2 zwei hermitesche, positiv semidefinite Matrizen, welche (3.10) und (3.11) genügen. Wir zeigen, dass dann $P_1 = P_2$ gilt. In der folgenden Rechnung lassen wir in Bezug auf den Beweis von Theorem 3.3.8 einige Zwischenschritte weg. Dann gilt:

$$\begin{aligned} G^*(E^*P_1A + A^*P_1E)G = -G^*QG \quad \Leftrightarrow \quad & (T^{-1})^* \left(\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (S^{-1})^* P_1 S^{-1} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} J^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (S^{-1})^* P_1 S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) T^{-1} \\ & = -(T^{-1})^* \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \end{aligned}$$

Ein entsprechendes Ergebnis bekommt man für P_2. Wir setzen nun

$$(S^{-1})^* P_1 S^{-1} := \begin{pmatrix} P_{13} & P_{14} \\ P_{14}^* & P_{15} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (S^{-1})^* P_2 S^{-1} := \begin{pmatrix} P_{23} & P_{24} \\ P_{24}^* & P_{25} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} & G^*(E^*P_1A + A^*P_1E)G = -G^*QG \quad \Leftrightarrow \quad P_{13}J + J^*P_{13} = -Q_{11} \\ \text{und} \quad & G^*(E^*P_2A + A^*P_2E)G = -G^*QG \quad \Leftrightarrow \quad P_{23}J + J^*P_{23} = -Q_{11}. \end{aligned}$$

Da die Lösung einer Lyapunovgleichung nach Theorem 2.3.5 immer eindeutig ist, folgt hieraus

$$P_{13} = P_{23}.$$

Die Bedingung (3.11) liefert uns

$$P_1 H = S^* \begin{pmatrix} P_{13} & P_{14} \\ P_{14}^* & P_{15} \end{pmatrix} S S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = S^* \begin{pmatrix} P_{13} & 0 \\ P_{14}^* & 0 \end{pmatrix} S \stackrel{!}{=} S^* \begin{pmatrix} P_{13} & P_{14} \\ P_{14}^* & P_{15} \end{pmatrix} S = P_1$$

und damit

$$\begin{pmatrix} P_{13} & P_{14} \\ P_{14}^* & P_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{13} & 0 \\ P_{14}^* & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_{14} = P_{15} = 0.$$

Ebenso ergibt sich

$$P_{24} = P_{25} = 0$$

und schließlich

$$P_1 = S^* \begin{pmatrix} P_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = S^* \begin{pmatrix} P_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S = P_2.$$

Es gibt also auch nur höchstens eine Matrix, welche den Gleichungen genügt und selbige ist durch

$$P := S^* \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S$$

gegeben, wobei P_{11} die Lösung der Lyapunovgleichung

$$P_{11}J + J^*P_{11} = -Q_{11}$$

ist. Nach Theorem 2.3.5 ist diese Lösung gegeben durch

$$P_{11} = \int_0^\infty (e^{Jt})^* Q_{11} (e^{Jt}) dt.$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
P &= S^* \begin{pmatrix} \int_0^\infty (e^{Jt})^* Q_{11} (e^{Jt}) dt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S \\
&= \int_0^\infty S^* \begin{pmatrix} (e^{Jt})^* Q_{11} (e^{Jt}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S dt \\
&= \int_0^\infty S^* \begin{pmatrix} e^{J^*t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S dt \\
&= \int_0^\infty S^* \begin{pmatrix} e^{J^*t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^* Q T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S dt \\
&= \int_0^\infty \left(T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S \right)^* Q \left(T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S \right) dt.
\end{aligned}$$

□

3.3.11 Bemerkung. Die in Formel (3.12) angegebene positiv semidefinite Matrix P ist positiv definit auf $\mathcal{R}(H)$, d.h. es gilt

$$x^* P x > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{R}(H) \setminus \{0\}.$$

Der Beweis dieser Aussage erfolgt mit Hilfe der positiven Definitheit von P_{11} analog zum Nachweis von Äquivalenz (3.8).

Im Hinblick auf mögliche Anwendungen muss man noch sagen, dass es teilweise schwer werden kann, die Weierstraßsche Normalform, und damit die Transformationsmatrizen S und T, explizit auszurechnen. Andererseits ist es jedoch sehr gut möglich, dass man sich mittels numerischer Verfahren und der Unterraumfolge in Theorem 3.2.1 die Menge der konsistenten Anfangswerte beschaffen kann. In diesem Sinne wollen wir zum Abschluss die folgende Betrachtung unternehmen.

Man sieht, dass die Matrix G in Proposition 3.3.10 die Eigenschaft $\mathcal{R}(G) = V_{k^*}$ erfüllt. Ist nun $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix mit $\mathcal{R}(U) = V_{k^*}$, so gilt

$$\begin{aligned}
G^*(E^*PA + A^*PE)G = -G^*QG \quad &\Leftrightarrow \quad x^*(A^*PE + E^*PA)x = -x^*Qx \;\; \forall\, x \in V_{k^*} \\
&\Leftrightarrow \quad U^*(E^*PA + A^*PE)U = -U^*QU.
\end{aligned}$$

Man kann also in Gleichung (3.10) statt G auch eine beliebige Matrix, deren Bild die Menge der konsistenten Anfangswerte ist betrachten und erhält die obigen Resultate ebenso.
Insbesondere Theorem 3.3.8 wollen wir unter diesem Gesichtspunkt noch einmal Revue passieren lassen.

3.3.12 Korollar. Es sei $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix mit $\mathcal{R}(U) = V_{k^*}$.
Wenn das System (3.1) asymptotisch stabil ist, dann besitzt für eine beliebige hermitesche Matrix Q mit (3.4) die Gleichung

$$U^*(E^*PA + A^*PE)U = -U^*QU \tag{3.13}$$

eine hermitesche, positiv semidefinite Matrix P als Lösung.
Andererseits sei Q eine hermitesche Matrix mit (3.4) und P eine hermitesche, positiv semidefinite Lösung von (3.13). Dann ist das System (3.1) asymptotisch stabil.

Ist A invertierbar, so gilt diese Ausage insbesondere für $U = (A^{-1}E)^k$ für beliebiges $k \geq k^*, k \in \mathbb{N}$, wobei (3.13) zu

$$\big((A^{-1}E)^k\big)^*\big(E^*PA + A^*PE\big)(A^{-1}E)^k = -\big((A^{-1}E)^k\big)^*Q(A^{-1}E)^k$$

wird.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar mit Theorem 3.3.8, den obigen Bemerkungen und der Tatsache, dass $(A^{-1}E)^k$ für jedes $k \geq k^*$ die Bedingung $\mathcal{R}((A^{-1}E)^k) = V_{k^*}$ erfüllt. Dies folgt sofort aus Theorem 3.2.1. □

3.3.13 Bemerkung. Die in der letzten Aussage von Korollar 3.3.12 geforderte Invertierbarkeit von A ist keine besondere Anforderung, da nach Proposition 3.3.4 die Invertierbarkeit von A eine notwendige Bedingung für die asymptotische Stabilität von (3.1) ist. Diese Aussage zeigt dann, dass man für sämtliche Berechnungen nur die Matrizen E und A benötigt.

Abschließend wollen wir die erhaltenen Resultate mit denen in [9] vergleichen. Es lässt sich zunächst sofort erkennen, dass sowohl [9, Theorem 4.6] als auch [9, Corollary 4.7] Spezialfälle der zweiten Aussage von Korollar 3.3.12 sind. Denn eine Lösung P von (3.5) ist stets auch eine Lösung von (3.13).
Betrachten wir nun [9, Corollary 4.14]. Für eine hermitesche, positiv definite Matrix $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist mit dem dortigen Projektor P_r die Matrix $P_r^*GP_r$ hermitesch und besitzt die Eigenschaft (3.4). [9, Corollary 4.14] ist damit ebenso ein Spezialfall von Korollar 3.3.12.
Betrachtet man nun [9, Corollary 4.15] so stellt man fest, dass die dortigen Aussagen nur für den Fall, dass die Matrix G hermitesch und positiv definit ist, oder etwas allgemeiner, wenn $P_r^*GP_r$ hermitesch ist und die Eigenschaft (3.4) besitzt, mit den hier erarbeiteten Resultaten vergleichbar sind. In diesem Fall ist die Aussage von [9, Corollary 4.15] ein Spezialfall von Proposition 3.3.10 bzw. der modifizierten Variante mit $G = U$ für beliebiges $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\mathcal{R}(U) = V_{k^*}$. Die Darstellung der Lösung allerdings ist eine völlig andere und nicht mit der hier erarbeiteten vergleichbar, da sie aus einem anderen Kontext stammt.

Es lässt sich also zusammenfassen, dass in [9] die Betrachtung der verallgemeinerten Lyapunov-Gleichung nicht auf den Unterraum der konsistenten Anfangswerte reduziert wurde, wodurch wir hier teilweise allgemeinere Resultate erarbeiten konnten.

Anhang A

Zur Lösungstheorie

Ziel dieses Kapitels ist es einen Beweis von Theorem 3.2.8 zu erarbeiten, d.h. wir wollen eine Basis des Lösungsraums von (3.1) erhalten. Bekanntlich sind im Fall von linearen Differentialgleichungen die Hauptvektoren das entsprechende Hilfsmittel um eine solche Basis zu finden. Aus diesem Grund wollen wir zunächst dieses Konzept verallgemeinern, um die passende algebraische Grundlage für die nachfolgenden Untersuchungen zu haben.

A.1 Verallgemeinerte Hauptvektoren

In Verallgemeinerung der Definition eines Hauptvektors $k-$ter Stufe einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wollen wir nun definieren, was ein verallgemeinerter Hauptvektor $k-$ter Stufe eines regulären Matrix-Paares (E, A) mit $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist. Da sich diese immer auf einen Eigenwert bzw. verallgemeinerten Eigenwert beziehen setzen wir voraus, dass $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$.
In diesem Abschnitt werden sämtliche Resultate aus der linearen Algebra zu Hauptvektoren und Haupträumen als bekannt vorausgesetzt.

A.1.1 Definition. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (E, A) regulär und $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ derart gegeben, dass $\det(\lambda E - A) = 0$.
Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ heißt *verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe* 1 von (E, A) zum verallgemeinerten Eigenwert λ, wenn $v \neq 0$ und $(\lambda E - A)v = 0$.
Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ heißt *verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe k*, $k \in \mathbb{N}$, von (E, A) zum verallgemeinerten Eigenwert λ, wenn $v \neq 0$ und ein verallgemeinerter Hauptvektor w der Stufe $k-1$ von (E, A) zu λ existiert, sodass

$$(A - \lambda E)v = Ew.$$

Die obige Definition fordert nur, dass ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $k \in \mathbb{N}$ nicht der

Nullvektor sein soll. Nun könnte es aber sein, dass ein solcher Vektor in $\mathcal{N}(E) \setminus \{0\}$ liegt. In diesem Fall würde die Definition eines verallgemeinerten Hauptvektors k-ter Stufe nicht viel Sinn machen, da $(A - \lambda E)v = 0$ gelten könnte und v somit einer der Stufe 1 wäre. Dass dies nicht passieren kann, klärt das folgende Lemma ab.

A.1.2 Lemma. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (E, A) regulär und $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ derart gegeben, dass $\det(\lambda E - A) = 0$.
Ist nun $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein verallgemeinter Hauptvektor der Stufe $k \in \mathbb{N}$ von (E, A) zu λ, so gilt $v \in V_{k^*} \setminus \{0\}$ und wegen Theorem 3.2.1(iv) somit $v \notin \mathcal{N}(E)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion. Ist v ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe 1 von (E, A) zu λ so gilt $(\lambda E - A)v = 0$. Das bedeutet, dass v ein verallgemeinerter Eigenvektor zu λ sein muss. Wie bereits gezeigt wurde, ist dann $x : [0, \infty) \to V_{k^*}, t \mapsto e^{\lambda t}v$ eine Lösung von (3.1), also $v \in V_{k^*} \setminus \{0\}$.
Nehmen wir nun an, wir hätten für ein $k \in \mathbb{N}$ gezeigt, dass ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $j \leq k$ von (E, A) zu λ stets in $V_{k^*} \setminus \{0\}$ liegt. Sei v ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $k + 1$ von (E, A) zu λ. Dann existiert also ein $w \in \mathbb{C}^n$ mit

$$(A - \lambda E)v = Ew$$

und w ist ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe k von (E, A) zu λ, also $w \in V_{k^*} \setminus \{0\}$. Wir verwenden nun die Weierstraßsche Normalform für das Matrix-Paar (E, A). Es existiert also ein $w_1 \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\}$, sodass $w = T\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiterhin existieren $v_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$ und $v_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$, sodass $v = T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (A - \lambda E)v = Ew \\
\Leftrightarrow\quad & S^{-1}\begin{pmatrix} J - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} - \lambda N \end{pmatrix} T^{-1}T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1}T\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix} J - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} - \lambda N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da $I_{n_2} - \lambda N$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ invertierbar ist, folgt $v_2 = 0$. Weiterhin kann v_1 nicht Null sein, da dies im Widerspruch dazu stünde, dass w_1 nicht Null ist. Also ist $v = T\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{k^*} \setminus \{0\}$. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Das nächste Resultat liefert eine gute alternative Charakterisierung von verallgemeinerten Hauptvektoren.

A.1.3 Lemma. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit (E, A) regulär und $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ derart gegeben, dass $\det(\lambda E - A) = 0$.
Ein Vektor $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ist genau dann ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe k von (E, A) zu λ, wenn Vektoren $v_1, ..., v_{k-1} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ existieren, sodass

$$\begin{array}{rcl} (\lambda E - A)v_0 & = & -Ev_1 \\ (\lambda E - A)v_1 & = & -Ev_2 \\ & \vdots & \\ (\lambda E - A)v_{k-2} & = & -Ev_{k-1} \\ (\lambda E - A)v_{k-1} & = & 0 \end{array} \tag{A.1}$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Definition A.1.1. □

A.1.4 Bemerkung. Man sieht schnell, dass für Vektoren $v_0, ..., v_{k-1} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, welche den Bedingungen (A.1) genügen, gilt, dass v_j ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $k-j$ von (E, A) zu λ ist für $j = 0, ..., k-1$. Mit Hilfe von Lemma A.1.2 folgt insbesondere $v_0, ..., v_{k-1} \in V_{k^*} \setminus \{0\}$.

Auf der Basis von (A.1) lässt sich nun eine Unterraumfolge konstruieren, welche die Unterräume liefert, die die verallgemeinerten Hauptvektoren von (E, A) zu λ enthalten. Dabei gehen wir die Gleichungen von unten nach oben durch. Wir definieren sie durch

$$W_1^\lambda := \mathcal{N}(\lambda E - A), \quad W_{i+1}^\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(EW_i^\lambda) \quad (i \geq 1). \tag{A.2}$$

Wir werden verschiedene Eigenschaften dieser Unterräume beweisen, benötigen aber zunächst noch ein Lemma.

A.1.5 Lemma. Es seien $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $z_0, ..., z_k \in \mathbb{C}^n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $(J - \lambda I)z_j = z_{j+1}$ für $j = 0, ..., k-1$ und $(J - \lambda I)z_k = 0$.

(ii) $(J - \lambda I)^{k+1} z_0 = 0$ und $z_j = (J - \lambda I)^j z_0$ für $j = 0, ..., k$.

Beweis. $(\Rightarrow)$: Es ist

$$(J - \lambda I)^{k+1} z_0 = (J - \lambda I)^k z_1 = (J - \lambda I)^{k-1} z_2 = ... = (J - \lambda I)z_k = 0.$$

Die zweite Aussage beweisen wir durch Induktion. $z_1 = (J - \lambda I)z_0$ nach Voraussetzung. Nehmen wir nun an, wir hätten $z_j = (J - \lambda I)^j z_0$ für $j = 0, ..., i$ und ein $i \leq k$ bewiesen. Dann ist

$$(J - \lambda I)^{i+1} z_0 = (J - \lambda I)(J - \lambda I)^i z_0 = (J - \lambda I)z_i = z_{i+1}.$$

$(\Leftarrow):$ Es ist $z_k = (J-\lambda I)^k z_0$ und $(J-\lambda I)^{k+1} z_0 = 0$. Damit folgt $(J-\lambda I) z_k = 0$. Weiterhin ist

$$z_{j+1} = (J-\lambda I)^{j+1} z_0 = (J-\lambda I)(J-\lambda I)^j z_0 = (J-\lambda I) z_j$$

für $j = 0, ..., k-1$. □

A.1.6 Proposition. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit (E, A) regulär und $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ derart gegeben, dass $\det(\lambda E - A) = 0$, und μ die Vielfachheit dieser Nullstelle. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2(i) gelten dann für die unter (A.2) definierten Mengen folgende Aussagen:

(i) $W_1^\lambda \subseteq W_2^\lambda \subseteq W_3^\lambda \subseteq ...,$

(ii) Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $k \in \mathbb{N}$ von (E, A) zu λ. Dann gilt $v \in W_k^\lambda$. Ist andererseits $v \in W_k^\lambda \setminus \{0\}$, so existiert ein $j \in \{1, ..., k\}$, sodass v ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe j von (E, A) zu λ ist.

(iii) $\forall\, i \in \mathbb{N}_0 :\ W_{\mu+i}^\lambda = W_\mu^\lambda,$

(iv) $W_\mu^\lambda \subseteq V_{k^*}$.

(v) v ist genau dann ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $k \in \mathbb{N}$ von (E, A) zu λ, wenn der Vektor $z \in \mathbb{C}^{n_1}$ in $\begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1} v$ ein Hauptvektor der Stufe k von J zu λ ist.

(vi) Sei $v_0 \in W_k^\lambda$, $k \in \mathbb{N}$. Für die durch (A.1) definierten und zu v_0 gehörigen Vektoren $v_1, ..., v_{k-1}$ gilt

$$v_i = T \begin{pmatrix} J - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^i T^{-1} v_0, \quad i = 1, ..., k-1.$$

(vii) $\forall\, k \in \mathbb{N} :\ W_k^\lambda = T\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} J - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^k\right),$

(viii) $\dim W_\mu^\lambda = \mu$.

Beweis. Wir zeigen (i) durch Induktion. Sei zunächst $x \in W_1^\lambda$. Dann ist $(\lambda E - A)x = 0$, also insbesondere $(A - \lambda E)x \in (E W_1^\lambda)$ und damit $x \in (A - \lambda E)^{-1}(E W_1^\lambda)$. Es folgt also $W_1^\lambda \subseteq W_2^\lambda$. Nehmen wir nun an, wir haben $W_1^\lambda \subseteq W_2^\lambda \subseteq ... \subseteq W_{k-1}^\lambda \subseteq W_k^\lambda$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gezeigt. Dann ist

$$W_{k+1}^\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(E W_k^\lambda) \supseteq (A - \lambda E)^{-1}(E W_{k-1}^\lambda) = W_k^\lambda.$$

Damit ist die Aussage (i) gezeigt.

Wir zeigen jetzt (ii). Sei v_0 ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe k von (E, A) zu λ. Dann

existieren nach Lemma A.1.3 Vektoren $v_1, ..., v_{k-1} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass (A.1) erfüllt ist. Es gilt $(\lambda E - A)v_{k-1} = 0$, also $v_{k-1} \in \mathcal{N}(\lambda E - A) = W_1^\lambda$. Weiter ist $(A - \lambda E)v_{k-2} = Ev_{k-1}$ und damit $v_{k-2} \in (A - \lambda E)^{-1}(EW_1^\lambda) = W_2^\lambda$. Dies lässt sich so fortführen und man erhält schließlich $v_0 \in W_k^\lambda$.
Sei nun $v_0 \in W_k^\lambda \setminus \{0\}$. Da $W_k^\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(EW_{k-1}^\lambda)$, existiert ein $v_1 \in W_{k-1}^\lambda$, sodass $(A - \lambda E)v_0 = Ev_1$. Ist nun $v_1 = 0$, so ist $(A - \lambda E)v_0 = 0$, also v_0 ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe 1 von (E, A) zu λ. Ist $v_1 \neq 0$ so ist nach Lemma A.1.2 auch $Ev_1 \neq 0$. Da $v_1 \in W_{k-1}^\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(EW_{k-2}^\lambda)$, existiert ein $v_2 \in W_{k-2}^\lambda$, sodass $(A - \lambda E)v_1 = Ev_2$. Ist nun $v_2 = 0$, so ist v_1 ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe 1 von (E, A) zu λ und v_0 damit einer der Stufe 2.
Dies lässt sich induktiv fortführen. Seien $v_1, ..., v_i \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ für ein $i < k - 2$, sodass $v_j \in W_{k-j}^\lambda$ für $j \leq i$ und $v_0, ..., v_i$ erfüllen (A.1) bis auf die letzte Gleichung. Da $v_i \in W_{k-i}^\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(EW_{k-i-1}^\lambda)$, existiert ein $v_{i+1} \in W_{k-i-1}^\lambda$, sodass $(A - \lambda E)v_i = Ev_{i+1}$. Ist $v_{i+1} = 0$, so ist v_0 ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $i + 1$ von (E, A) zu λ, ist $v_{i+1} \neq 0$ so greift das induktive Argument.
Sind nun $v_1, ..., v_{k-2} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass $v_j \in W_{k-j}^\lambda$ für $j \leq k - 2$ und $v_0, ..., v_{k-2}$ erfüllen (A.1) bis auf die letzte Gleichung, dann existiert ein $v_{k-1} \in W_1^\lambda$, sodass $(A - \lambda E)v_{k-2} = Ev_{k-1}$. Ist $v_{k-1} = 0$, so ist v_0 ein verallgemeinerter Hauptvektor der Stufe $k - 1$ von (E, A) zu λ, ist $v_{k-1} \neq 0$, so ist aufgrund von $(\lambda E - A)v_{k-1} = 0$ der Vektor v_0 ein verallgemeinter Hauptvektor der Stufe k von (E, A) zu λ. Die Induktion endet hier und Aussage (ii) ist gezeigt.
Die Aussage (iv) folgt sofort mit (ii) und Lemma A.1.2.

Um die restlichen Aussagen zu zeigen betrachten wir mit $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ einen verallgemeinerten Hauptvektor der Stufe $k \in \mathbb{N}$ von (E, A) zu λ. Dann existieren nach Lemma A.1.3 Vektoren $v_1, ..., v_{k-1} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass (A.1) erfüllt ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)v_j &= Ev_{j+1}, \quad j = 0, ..., k-2 \\ \text{und} \quad (\lambda E - A)v_{k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung A.1.4 gilt nun $v_0, ..., v_{k-1} \in V_{k^*} \setminus \{0\}$, also existieren $z_0, ..., z_{k-1} \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\}$, sodass $v_j = T \begin{pmatrix} z_j \\ 0 \end{pmatrix}$ für $j = 0, ..., k-1$. Dann lassen sich diese Bedingungen mit Hilfe der Weierstraßschen Normalform schreiben als

$$\begin{aligned} S^{-1} \begin{pmatrix} J - \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} - \lambda N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_j \\ 0 \end{pmatrix} &= S^{-1} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, ..., k-2 \\ \text{und} \quad S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda J - I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda N - I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} (J-\lambda I_{n_1})z_j &= z_{j+1}, \quad j=0,...,k-2 \\ \text{und} \quad (J-\lambda I_{n_1})z_{k-1} &= 0. \end{aligned}$$

Mit Lemma A.1.5 ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} (J-\lambda I_{n_1})^k z_0 &= 0 \\ \text{und} \qquad z_j &= (J-\lambda I_{n_1})^j z_0, \quad j=0,...,k-1. \end{aligned}$$

Nun lässt sich Aussage (v) zeigen. Denn es gilt, da $v_j = T\begin{pmatrix} z_j \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ für $j=0,...,k-1$, dass $z_j \neq 0$ für $j=0,...,k-1$. Damit ist also $(J-\lambda I)^k z_0 = 0$ und $(J-\lambda I)^{k-1} z_0 = z_{k-1} \neq 0$, womit z_0 ein Hauptvektor der Stufe k von J zu λ ist. Da $v_0 = T\begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist damit Aussage (v) gezeigt.

Wir zeigen (vi). Es gilt

$$\begin{aligned} v_j &= T\begin{pmatrix} z_j \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} (J-\lambda I_{n_1})^j z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} J-\lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} J-\lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^j T^{-1} v_0 \end{aligned}$$

für $j=1,...,k-1$. Somit ist Aussage (vi) gezeigt.

Wir zeigen nun (vii). Aus (ii) und (v) folgt sofort

$$\begin{aligned} W_k^\lambda &\overset{\text{(ii)}}{=} \{v \in \mathbb{C}^n \mid \exists\, j \in \{1,...,k\} : v \text{ ist ein verallgemeinerter Hauptvektor} \\ &\qquad\qquad \text{der Stufe } j \text{ von } (E,A) \text{ zu } \lambda\} \cup \{0\} \\ &\overset{\text{(v)}}{=} T\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \exists\, j \in \{1,...,k\} : z_1 \text{ ist ein Hauptvektor der Stufe } j \text{ von } (E,A) \text{ zu } \lambda \right\} \cup \{0\} \\ &= T\left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (J-\lambda I_{n_1})^k z_1 = 0,\ z_2 = 0 \right\} \\ &= T\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} J-\lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^k \right). \end{aligned}$$

Das ist die Aussage (vii).

Es wird (viii) gezeigt. Da nach Lemma 3.2.2(iv) die Zahl μ ebenfalls die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von J ist, gilt $\dim \mathcal{N}((J - \lambda I_{n_1})^{\mu}) = \mu$. Mit (vii) folgt daraus sofort $\dim W_{\mu}^{\lambda} = \mu$, also (viii).

Zum Abschluss des Beweises wird nun die Aussage (iii) gezeigt. Da

$$\mathcal{N}((J - \lambda I_{n_1})^{\mu+1}) = \mathcal{N}((J - \lambda I_{n_1})^{\mu})$$

folgt aus (vii) sofort

$$W_{\mu+1}^{\lambda} = W_{\mu}^{\lambda}$$

und somit (iii). □

A.1.7 Definition. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit (E, A) regulär und $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ derart gegeben, dass $\det(\lambda E - A) = 0$.

Der Unterraum des $\mathbb{C}^n$ der alle verallgemeinerten Hauptvektoren jeglicher Stufe von (E, A) zu λ enthält, den Nullvektor und nur diese heißt *verallgemeinerter Hauptraum* zum verallgemeinerten Eigenwert λ von (E, A).

A.1.8 Bemerkung. Aufgrund von Proposition A.1.6 ist klar, dass der verallgemeinerte Hauptraum zu einem Wert λ mit $\det(\lambda E - A) = 0$ genau W_{μ}^{λ} ist, wobei μ die Vielfachheit dieser Nullstelle ist.

A.1.9 Proposition. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit (E, A) regulär und $\deg\big(\det(\lambda E - A)\big) \geq 1$. Weiterhin seien $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von $\det(\lambda E - A)$ mit den Vielfachheiten $\mu_1, ..., \mu_k$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $W_{\mu_i}^{\lambda_i} \cap W_{\mu_j}^{\lambda_j} = \{0\}$ für alle $i, j \in \{1, ..., k\}$ mit $i \neq j$,

(ii) $\bigoplus_{i=1}^{k} W_{\mu_i}^{\lambda_i} = V_{k^*}$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage (i). Seien $i, j \in \{1, ..., k\}$ mit $i \neq j$. Da

$$\mathcal{N}((J - \lambda_i I_{n_1})^{\mu_i}) \cap \mathcal{N}((J - \lambda_j I_{n_1})^{\mu_j}) = \{0\}$$

folgt die Aussage mit Proposition A.1.6(vii).

Um (ii) zu zeigen benutzen wir das Resultat, dass $\mathbb{C}^{n_1}$ eine Basis aus Hauptvektoren von J besitzt. Aufgrund der Regularität von T folgt die Aussage nun unmittelbar mit Proposition A.1.6(ii), (iv) und (v). □

A.2 Zum Lösungsraum

In diesem Abschnitt wollen wir die Darstellung der Lösung mittels der verallgemeinerten Hauptvektoren erarbeiten. Ziel ist es also eine Basis des Lösungsraums von (3.1) zu erhalten. Dafür benötigen wir zunächst das Wissen über die Dimension dieses Lösungsraums.

A.2.1 Lemma. Betrachte das System (3.1), wobei das Matrix-Paar (E, A) regulär ist. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen von (3.1). Dann ist $\mathcal{L}$ ein Unterraum des Raums der stetig differenzierbaren Funktionen und es gilt

$$\dim \mathcal{L} = \dim V_{k^*} = \deg\big(\det(\lambda E - A)\big).$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Lemma 3.2.2. Wenn $x(\cdot) \in \mathcal{L}$ eine beliebige Lösung von (3.1) ist und $x^0 := x(0) \in V_{k^*}$, dann hat $x(\cdot)$ nach Lemma 3.2.7(iv) die eindeutige Darstellung

$$x(t) = T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} x^0, \quad t \geq 0.$$

Ist nun $y(\cdot)$ eine weitere Lösung von (3.1) zum Anfangswert y^0, so ist

$$x(t) + y(t) = T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(x^0 + y^0), \quad t \geq 0.$$

Die Unterraumeigenschaft von $\mathcal{L}$ lässt sich also auf die von V_{k^*} zurückführen. Wie sich aus der Darstellung von V_{k^*} in Lemma 3.2.7(iii) ergibt, ist

$$\dim V_{k^*} = n_1 = \deg\big(\det(\lambda E - A)\big).$$

Sei $\{v_1, ..., v_{n_1}\}$ eine Basis von V_{k^*}. Dann existieren $c_1, ..., c_{n_1} \in \mathbb{C}$, sodass $x^0 = \sum_{k=1}^{n_1} c_k v_k$. Damit ist

$$\begin{aligned} x(t) &= T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} x^0 \\ &= T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \sum_{k=1}^{n_1} c_k v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} c_k \left(T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} v_k \right) \end{aligned}$$

für jedes $t \geq 0$. Also ist jede Lösung $x(\cdot)$ eine Linearkombination der Lösungen zu den Anfangswerten $v_1, ..., v_{n_1}$. Es folgt

$$\dim \mathcal{L} \leq \dim V_{k^*}.$$

Da nun insbesondere die Funktionen

$$y_k(t) := T \begin{pmatrix} e^{Jt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} v_k, \quad t \geq 0,\ k \in \{1, .., n_1\}$$

Lösungen von (3.1) und auch linear unabhängig sind, da die Vektoren $y_1(0) = v_1, ..., y_{n_1}(0) = v_{n_1}$ linear unabhängig sind, folgt dass

$$\dim \mathcal{L} \geq \dim V_{k^*}$$

und somit

$$\dim \mathcal{L} = \dim V_{k^*} = \deg \big(\det(\lambda E - A) \big).$$

□

A.2.2 Bemerkung. Falls nun $\deg \big(\det(\lambda E - A) \big) = 0$, so ist also $V_{k^*} = \{0\}$ und insbesondere hat das System (3.1) nach Bemerkung 3.3.1 nur die triviale Lösung. Es ist also sinnvoll die Betrachtungen auf den Fall $\deg \big(\det(\lambda E - A) \big) \geq 1$ zu beschränken.

Wir formulieren jetzt noch einmal Theorem 3.2.8 und beweisen dieses anschließend.

A.2.3 Theorem. Es seien $E, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit (E, A) regulär und $n_1 = \deg \big(\det(\lambda E - A) \big) \geq 1$. Sei $\{v_0^1, ..., v_0^{n_1}\}$ eine Basis von V_{k^*} aus verallgemeinerten Hauptvektoren der Stufen $k_1, ..., k_{n_1}$ von (E, A) zu den (nicht notwendig verschiedenen) verallgemeinerten Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_{n_1}$. Für $j \in \{1, ..., n_1\}$ seien weiterhin $v_1^j, ..., v_{k_j - 1}^j \in V_{k^*} \setminus \{0\}$ die zu v_0^j gehörigen und den Bedingungen (A.1) genügenden Vektoren. Sei nun für $i \in \{1, ..., n_1\}$

$$x_i(t) := e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{1}{j!} v_j^i t^j, \quad t \geq 0.$$

Dann bildet die Menge $\{x_1(\cdot), ..., x_{n_1}(\cdot)\}$ eine Basis des Lösungsraums von (3.1).

Beweis. Zunächst muss man sich Gedanken machen, ob man überhaupt eine Basis von V_{k^*} aus verallgemeinerten Hauptvektoren von (E, A) wählen kann. Dies funktioniert wegen Proposition A.1.9. Dann ist klar, dass die so gewählten $x_i(\cdot), i = 1, ..., n_1$ linear unabhängig sind, da die Vektoren $x_1(0) = v_0^1, ..., x_{n_1}(0) = v_0^{n_1}$ linear unabhängig sind.
Zu zeigen bleibt, dass die $x_i(\cdot)$ Lösungen von (3.1) sind. Betrachten wir dazu ein $i \in \{1, ..., n_1\}$. Für $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} & E\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) \\ \Leftrightarrow \quad & Ee^{\lambda_i t} \left(\lambda_i \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{1}{j!} v_j^i t^j + \sum_{j=0}^{k_i - 2} \frac{1}{j!} v_{j+1}^i t^j \right) = Ae^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{1}{j!} v_j^i t^j. \end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir daraus die Bedingungen:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda_i E - A)v_0^i & = & -Ev_1^i \\ (\lambda_i E - A)v_1^i & = & -Ev_2^i \\ & \vdots & \\ (\lambda_i E - A)v_{k_i-2}^i & = & -Ev_{k_i-1}^i \\ (\lambda_i E - A)v_{k_i-1}^i & = & 0 \end{array}$$

Diese sind aber gerade aufgrund der Wahl der Vektoren $v_0^i, ..., v_{k_i-1}^i$ erfüllt. Damit ist $x_i(\cdot)$ also Lösung von (3.1).

Aufgrund von Lemma A.2.1 bildet die Menge $\{x_1(\cdot), ..., x_{n_1}(\cdot)\}$ also eine Basis des Lösungsraums von (3.1). □

A.2.4 Bemerkung. Es ist zunächst zu bemerken, dass die hier erarbeitete Basis des Lösungsraums sich ohne jegliche Kenntnis der Weierstraßschen Normalform allein mit den Matrizen E und A berechnen lässt.

Mit Hilfe von Proposition A.1.6(vi) kann man die Basis des Lösungsraums aber auch noch anders darstellen. Für die Vektoren v_j^i gilt demnach

$$v_j^i = T \begin{pmatrix} J - \lambda_i I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^j T^{-1} v_0^i.$$

Weiterhin ist mit Proposition A.1.6(v) klar, dass $v_j^i = 0$ für jedes j mit $k_i \leq j \leq \mu_i - 1$, wobei μ_i die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle von $\det(\lambda E - A)$ ist. Damit gilt

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} \frac{1}{j!} T \begin{pmatrix} J - \lambda_i I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^j T^{-1} v_0^i t^j, \quad t \geq 0.$$

Literaturverzeichnis

[1] Bernd Aulbach. *Gewöhnliche Differenzialgleichungen.* Elsevier, Spektrum Akademsicher Verlag, München, 2004.

[2] David H. Owens, Dragutin Lj. Debeljkovic. Consistency and Liapunov Stability of Linear Descriptor Systems: A Geometric Analysis. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2:139–151, 1985.

[3] Herbert Amann, Joachim Escher. *Analysis II.* Birkhäuser, Basel, 1999.

[4] Roger A. Horn, Charles R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] Aleksandr M. Lyapunov. *The General Problem of the Stability of Motion.* Taylor & Francis, London, 1992.

[6] Horacio J. Marquez. *Nonlinear Control Systems: Analysis and Design.* Wiley, Hoboken, 2003.

[7] Peter Kunkel, Volker Mehrmann. *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution.* European Mathematical Society Publishing House, Zürich, 2006.

[8] Dragutin Debeljkovic, Nemanja Visnjic, Milmir Pjescic. The Stability of Linear Continuous Singular Systems in the sense of Lyapunov: An Overview. *Scientific Technical Review*, 1:51–65, 2007.

[9] Tatjana Stykel. *Analysis and Numerical Solution of Generalized Lyapunov Equations.* PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2002.