Vorlesungsskript zur Analysis 2 im SoSe 2025

Prof. Dr. Helge Glöckner

Fassung vom 12.08.2025

Contents

1 Riemann-Integrale, Hauptsatz und Integrationsregeln 4

2 Uneigentliche Integrale 39

3 Integration rationaler Funktionen via Partialbruchzerlegung 47

4 Taylorentwicklung von C^k-Funktionen 53

5 Differenzierbarkeit von Potenzreihen 61

6 Taylorreihen 64

7 Normierte Räume; Normen auf $\mathbb{R}^n$ 67

8 Die Supremumsnorm 86

9 Stetigkeit linearer Abbildungen; Operatornorm 93

10 Die Matrix-Exponentialfunktion 107

11 Topologien und Stetigkeit 113

12 Beispiele: Induzierte Topologie, Produkttopologie 118

13 Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge 128

14 Kompaktheit und Anwendungen 134

15 Wege und Weglänge 151

16 Partiell differenzierbare reellwertige Funktionen 166

17 Zweite Ableitungen, Taylorentwicklung und lokale Extrema 182

18 Höhere Ableitungen reellwertiger Funktionen 195

19 Partiell differenzierbare vektorwertige Funktionen 201

20 Beziehungen zwischen Lipschitzkonstanten und Ableitungen 209

21 Totale Differenzierbarkeit 212

22 Strikte Differenzierbarkeit 223

23 Der Banachsche Fixpunktsatz 226

24 Der Satz über die Umkehrfunktion 229

25 Der Satz über implizite Funktionen 239

26 Extrema unter Nebenbedingungen 245

27 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung 250

28 Lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen 267

29 Differentialgleichungen zweiter Ordnung 279

A Grundwissen über Polynome 292

B Existenz von Partialbruchzerlegungen 297

C Wiederholung: Metrische Räume, Stetigkeit 301

Teil I: Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variable

1 Riemann-Integrale, Hauptsatz und Integrationsregeln

Dieses Kapitel ist eine überarbeitete und erweiterte Fassung des in Prof. Glöckners Analysis 1 bereitgestellten Materials zur Integrationstheorie.

Wir betrachten zunächst *Treppenfunktionen* ϕ auf einem Intervall $[a, b]$. Das sind Funktionen, deren Graph im Wesentlichen wie ein Balkendiagramm aussieht. Hier ist anschaulich klar, was der zwischem dem Graphen von ϕ und der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt sein sollte (wobei Anteile oberhalb der Achse positiv und Anteile unterhalb negativ gezählt werden), und wir nennen diesen $\int_a^b \phi(x)\, dx$. Dann wenden wir uns Riemann-integrierbaren Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zu. Grob gesagt sind das Funktionen, die sich gut genug zwischen Treppenfunktionen einschließen lassen, um mit deren Hilfe einen Flächeninhalt $\int_a^b f(x)\, dx$ (das Riemann-Integral von f über das Intervall $[a, b]$) festzulegen. Jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar. Als Höhepunkt beweisen wir den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, der einen Zusammenhang zwischen Riemann-Integralen stetiger Funktionen und Stammfunktionen herstellt.

Treppenfunktionen und ihr Integral

Definition 1.1 Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Eine Menge Z von Zahlen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ heißt *Zerlegung*[1] des Intervalls $[a, b]$. Eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ heißt *Verfeinerung* von Z, wenn $Z \subseteq Z'$, d.h. jeder Zerlegungspunkt von Z ist auch einer von Z'. Sind Z und Z' Zerlegungen von $[a, b]$, so auch $Z \cup Z'$, und dies ist eine Verfeinerung sowohl von Z als auch von Z' (eine *gemeinsame Verfeinerung*). Eine Funktion $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ von $[a, b]$ und Zahlen

[1] Genauer: $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ mit $t_0 = a$, $t_n = b$ und $t_{k-1} < t_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

$c_1, \ldots, c_n$ derart gibt, dass

$$\phi(x) = c_k \quad \text{für alle } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } x \in \,]t_{k-1}, t_k[.$$

Die c_k sind dann eindeutig festgelegt, denn es ist $c_k = \phi(t)$ für jedes $t \in \,]t_{k-1}, t_k[$. Über die Funktionswerte $f(t_k)$ wird nichts gesagt, diese dürfen z.B. von $f(t_k)$ und $f(t_{k-1})$ verschieden sein. Wir sprechen auch von einer Treppenfunkton *bezüglich* Z und definieren

$$S_Z(\phi) := \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) c_k.$$

Ist $a = b$, so ist $n = 0$ und $S_Z(\phi)$ die leere Summe, also 0.

Lemma 1.2 *Sei $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich Z und Z' eine weitere Zerlegung von $[a,b]$.*

(a) *Ist Z' eine Verfeinerung von Z, so ist ϕ auch eine Treppenfunktion bzgl. Z' und $S_Z(\phi) = S_{Z'}(\phi)$.*

(b) *Ist ϕ auch bzgl. Z' eine Treppenfunktion, so ist $S_Z(\phi) = S_{Z'}(\phi)$.*

Beweis. (a) Es genügt, den Fall zu betrachten, dass $Z' = Z \cup \{\tau\}$ mit einem $\tau \in [a,b] \setminus Z$. Dann ist $Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \,]t_{\ell-1}, t_\ell[$ für ein $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. Setzen wir $s_k := t_k$ für $k \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$, $s_\ell := \tau$ und $s_k := t_{k-1}$ für $k \in \{\ell + 1, \ldots, n+1\}$, so ist

$$Z' = \{s_0 < s_1 < \ldots < s_{n+1}\}.$$

Auf $]s_{k-1}, s_k[$ für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ nimmt ϕ die Werte $c_1, \ldots, c_\ell, c_\ell, \ldots, c_n$ an, also den Wert $C_k := c_k$ für $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $C_k := c_{k-1}$ für $k \in \{\ell + 1, \ldots, n+1\}$. Somit ist ϕ eine Treppenfunktion bzgl. Z'. Da

$$(t_\ell - t_{\ell-1})c_\ell = (t_\ell - \tau)c_\ell + (\tau - t_{\ell-1})c_\ell = (s_{\ell+1} - s_\ell)C_{\ell+1} + (s_\ell - s_{\ell-1})C_\ell,$$

folgt

$$\begin{aligned} S_Z(\phi) &= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) c_k \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} \underbrace{(t_k - t_{k-1}) c_k}_{=(s_k - s_{k-1})C_k} + (t_\ell - t_{\ell-1})c_\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} \underbrace{(t_k - t_{k-1}) c_k}_{=(s_{k+1} - s_k)C_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (s_k - s_{k-1}) C_k = S_{Z'}(\phi). \end{aligned}$$

(b) Anwendung von (a) auf Z und $Z \cup Z'$ bzw. Z und $Z \cup Z'$ liefert $S_Z(\phi) = S_{Z\cup Z'}(\phi) = S_{Z'}(\phi)$. $\square$

Definition 1.3 Ist ϕ eine Treppenfunktion $[a, b]$, so definieren wir ihr *Integral* als

$$\int_a^b \phi(x)\,dx := \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})c_k,$$

wobei $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist derart, dass ϕ auf $]t_{k-1}, t_k[$ konstant ist für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und c_k der Funktionswert auf diesem Intervall.

Nach Lemma 1.2 (b) ist $\int_a^b \phi(x)\,dx$ wohldefiniert, unabhängig von der gewählten Zerlegung Z.

Beispiel 1.4 (Funktionen mit endlichem Träger). Für jede Zerlegung $Z := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ von $[a, b]$ und beliebige $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) := y_k$ falls $x = t_k$ für ein $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\phi(x) := 0$ für $x \in [a, b] \setminus \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Treppenfunktion bzgl. Z mit $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ und somit

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})c_k = 0.$$

Definition 1.5 Seien $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon X \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen auf einer Menge X. Wir schreiben $f \le g$, wenn $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in X$. Weiter definieren wir das punktweise Maximum als die Funktion

$$\max(f, g)\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max(f(x), g(x)).$$

Das Integral von Treppenfunktionen hat u.a. folgende Eigenschaften:

Lemma 1.6 *Seien $a \le b$ reelle Zahlen.*

(a) *(Linearität). Sind $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda f + \mu g$ eine Treppenfunktion und*

$$\int_a^b (\lambda\phi + \mu\psi)(x)\,dx = \lambda \int_a^b \phi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

(b) (*Monotonie*) *Sind* $\phi, \psi \in T_a^b$ *und* $\phi \le \psi$, *so ist* $\int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx$.

(c) (*Intervalladditivität*). *Ist* $\phi \in T_a^b$ *und* $c \in [a,b]$, *so sind* $\phi|_{[a,c]}$ *und* $\phi|_{[c,b]}$ *Treppenfunktionen und es gilt*[2]

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^c \phi(x)\,dx + \int_c^b \phi(x)\,dx.$$

Beweis. (a) und (b) Sei ϕ eine Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung Z und ψ eine Treppenfunktion bzgl. Z'. Nach Ersetzen von Z und Z' durch $Z \cup Z'$ dürfen wir annehmen, dass $Z = Z' = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ (vg. Lemma 2(a)). Sei a_k der Funktionswert von ϕ auf $]t_{k-1}, t_k[$ und d_k der Funktionswert von ψ, für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann hat $\lambda\phi + \mu\psi$ den Funktionswert $\lambda c_k + \mu d_k$ auf $]t_{k-1}, t_k[$ und somit ist $\lambda\phi + \mu\psi$ eine Treppenfunktion mit

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda\phi + \mu\psi)(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n (\lambda c_k + \mu d_k)(t_k - t_{k-1}) \\
&= \lambda \sum_{k=1}^n c_k(t_k - t_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^n d_k(t_k - t_{k-1}) \\
&= \lambda \int_a^b \phi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Also gilt (a). Ist $\phi \le \psi$, so ist $c_k \le d_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und somit

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})c_k \le \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})d_k = \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

(c) Sei ϕ eine Treppenfunktion bzgl. einer Zerlegung Z von $[a,b]$. Nach Ersetzen von Z durch $Z \cup \{c\}$ dürfen wir annehmen, dass $c \in Z$ (siehe Lemma 1.2 (c)). Sei etwa $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ und $c = t_\ell$. Dann ist $Z' := \{a = t_0 < \ldots, < t_\ell = c\}$ ene Zerlegung von $[a,c]$ und $Z'' := \{c = t_\ell < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Sei c_k der Funktionswert von ϕ auf $]t_{k-1}, t_k[$. Da $\phi|_{[a,c]}$ auf $]t_{k-1}, t_k[$ konstant ist mit Wert c_k für $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $\phi|_{[c,b]}$ konstant ist mit Wert c_k für $k \in \{\ell + 1, \ldots, n\}$, sind $\phi|_{[a,c]}$ und

[2] Hier ist $\int_a^c f(x)\,dx$ eine Kurzschreibweise für $\int_a^c (f|_{[a,c]})(x)\,dx$.

$\phi|_{[c,b]}$ Treppenfunktionen mit

$$\begin{aligned}\int_a^c \phi(x)\,dx + \int_c^b \phi(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{\ell}(t_k - t_{k-1})c_k + \sum_{\ell+1}^{n}(t_k - t_{k-1})c_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})c_k = \int_a^b \phi(x)\,dx,\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. $\square$

Bemerkung 1.7 Sind $\phi, \psi \in T_a^b$, so ist auch $\max(\phi, \psi) \in T_a^b$; das sieht man wie im Beweis von Lemma 1.6 (a) mit $\max(c_k, d_k)$ statt $\lambda c_k + \mu d_k$.

Riemann-integrierbare Funktionen und ihr Integral

Definition 1.8 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion (d.h. $f([a,b])$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$). Wir definieren das *Oberintegral* von f über $[a,b]$ als

$$\int_a^{b*} f(x)\,dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \colon \psi \in T_a^b \text{ mit } f \leq \psi\right\}.$$

Das *Unterintegral* von f über $[a,b]$ ist

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx := \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \colon \phi \in T_a^b \text{ mit } \phi \leq f\right\}.$$

Ist $\int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a*}^{b} f(x)\,dx$, so nennen wir die Funktion f *Riemann-integrierbar* und definieren das (Riemann-) Integral von f über $[a,b]$ als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{b*} f(x)\,dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx.$$

Die Mengen, über die wir das Infimum bzw. Supremum bilden, sind nicht leer. Wegen der Beschränktkeit von f gibt es nämlich reelle Zehlen r und R derart, dass $r \leq f(x) \leq R$ für alle $x \in [a,b]$. Die Konstanten Funktionen ϕ und ψ auf $[a,b]$ mit Funktionswert r bzw. R sind Treppenfunktionen und es ist $\phi \leq f \leq \psi$. Das Oberintegral ist somit $< +\infty$ und das Unterintegral $> -\infty$.

Bemerkung 1.9 Man beachte, dass für alle $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ nach Lemma 1.6 (b) die Ungleichung

$$\int_a^b \phi(x)\, dx \leq \int_a^b \psi(x)\, dx$$

gilt. Wir halten ϕ fest; da die linke Seite eine untere Schranke für alle rechten Seiten ist, folgt für deren Infimum

$$\int_a^b \phi(x)\, dx \leq \int_a^{b*} f(x)\, dx$$

(womit das Oberintegral $> -\infty$ ist und somit endlich). Da die rechte Seite eine obere Schranke für alle der linken Seiten ist, folgt für deren Supremum

$$\int_{a\,*}^b f(x)\, dx \leq \int_a^{b*} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Bemerkung 1.10 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\phi_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $\phi_0 \leq f$. Dann gilt

$$\int_{a\,*}^b f(x)\, dx = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx \colon \phi \in T_a^b \text{ mit } \phi_0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

Gegeben $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$ ist nämlich $\phi_0 \leq \max(\phi_0, \phi) \leq f$ und $\int_a^b \phi(x)\, dx \leq \int_a^b \max(\phi_0(x), \phi(x))\, dx$.

Ist $f \leq \psi_0$ mit $\psi_0 \in T_a^b$, so braucht man analog zur Berechnung des Oberintegral nur Treppenfunktionen ψ mit $f \leq \psi \leq \psi_0$ zu betrachten.

Ist insbesondere bereits $f \in T_a^b$ eine Treppenfunktion, so können wir $\phi_0 := \psi_0 := f$ setzen und sehen, dass das Unterintegral von f gleich dem Supremum der einpunktigen Menge $\{\int_a^b f(x)\, dx\}$ ist und somit gleich dem Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ gemäß Definition 1.3. Analog ist das Oberintegral gleich $\int_a^b f(x)\, dx$. Die Treppenfunktion f ist also Riemann-integrierbar und ihr Riemann-Integral stimmt mit ihrem Treppenfunktions-Integral nach Definition 1.3 überein.

Die folgende Charakterisierung Riemann-integrierbarer Funktionen ist äußerst nützlich, denn die hier formulierte Bedingung kann man besser nachrechnen.

Lemma 1.11 *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \le f \le \psi$ existieren derart, dass*

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \le \varepsilon.$$

In diesem Fall gilt

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \phi(x)\,dx + \varepsilon. \tag{2}$$

Beweis. Ist f Riemann-integrierbar und $\varepsilon > 0$, so gibt es per Definition von Ober- und Unterintegral als Supremum bzw. Infimum Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \le f \le \psi$ derart, dass

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \le \int_a^{b^*} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

und

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \ge \int_{a\,*}^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Da f Riemann-integierbar ist, können wir die Sternchen in (3) und (4) weglassen und erhalten

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_{a*}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b^*} f(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx$, folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x)\,dx &\le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx \\ &= \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b \phi(x)\,dx + \varepsilon \end{aligned}$$

und somit (2).

Ist umgekehrt die genannte Bedingung erfüllt, so wählen wir zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen ϕ und ψ wie im Lemma beschrieben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a\,*}^b f(x)\,dx \right| &= \int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a\,*}^b f(x)\,dx \\ &\le \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\left|\int_a^{b^*} f(x)\,dx - \int_{a*}^b f(x)\,dx\right| = 0$ und somit

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \int_{a\ *}^b f(x)\,dx.$$

Also ist f Riemann-integrierbar. □

Folgerung 1.12 *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Ist $a = b$, so ist f eine Treppenfunktion und die Aussage ist trivial. Sei nun $b > a$. Da die stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall als Definitionsbereich hat, ist sie nach Satz IV.1.26 im Vorlesungsskript zur Analysis 1 von Prof. Neeb (das wir in der Analysis 1 benutzt hatten) *gleichmäßig* stetig. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für alle } x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| < \delta.$$

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(b-a)/n < \delta$ und setzen

$$t_k := a + \frac{k}{n}(b-a) \quad \text{für } k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Dann ist $Z = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Wir definieren

$$C_k := \max f([t_{k-1}, t_k]) \quad \text{und} \quad c_k := \min f([t_{k-1}, t_k]) \quad \text{für } k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Dann ist also $C_k \ge c_k$. Für jedes $k \in \{1,\ldots,n\}$ gibt es $x_k, y_k \in [t_{k-1}, t_k]$ mit $C_k = f(x_k)$ und $c_k = f(y_k)$. Dann ist $|x_k - y_k| \le t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$ und somit

$$C_k - c_k = |C_k - c_k| = |f(x_k) - f(y_k)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{5}$$

Weiter definieren wir Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ via

$$\phi(x) := c_k \quad \text{und} \quad \psi(x) := C_k \quad \text{für } k \in \{1,\ldots,n\} \text{ und } x \in [t_{k-1}, t_k[$$

sowie $\phi(b) := c_n$ und $\psi(b) := C_n$. Dann gilt $\phi \le f \le \psi$ und

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx &= \sum_{k=1}^n (C_k - c_k)(t_k - t_{k-1}) \\ &\le \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})}_{=t_n - t_0} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,\end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus (5) folgt. Also ist f nach Lemma 1.11 Riemann-integrierbar. $\square$

Definition 1.13 Sind $a \leq b$ reelle Zahlen und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so definieren wir

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Riemann-Integral hat u.a. folgende Eigenschaften.

Satz 1.14 *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen.*

(a) (*Linearität*) *Sind $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) (*Monotonie*) *Sind $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f \leq g$, so folgt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Insbesondere gilt

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M \tag{6}$$

mit $m := \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$ und $M := \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$.

(c) (*Intervalladditivität*). *Sei $c \in [a,b]$. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{7}$$

und weiter für alle $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx. \tag{8}$$

(d) (*Integralabschätzung*). *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le (b-a)\|f\|_\infty \tag{9}$$

mit $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}$. Zudem ist die Funktion $|.| \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ Riemann-integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10}$$

Beweis. (a) Nach Lemma 1.11 existieren Treppenfunktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in T_a^b$ derart, dass $\phi_1 \le f \le \psi_1$, $\phi_2 \le g \le \psi_2$ und

$$\int_a^b \psi_j(x)\,dx - \int_a^b \phi_j(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } j \in \{1,2\}. \tag{11}$$

Dann $\phi_1 + \phi_2 \in T_a^b$, $\psi_1 + \psi_2 \in T_a^b$ und $\phi_1 + \phi_2 \le f + g \le \psi_1 + \psi_2$ sowie

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(x)\,dx - \int_a^b (\phi_1 + \phi_2)(x)\,dx \\
&\qquad = \int_a^b \psi_2(x)\,dx - \int_a^b \phi_2(x)\,dx + \int_a^b \psi_1(x)\,dx - \int_a^b \phi_1(x)\,dx \\
&\qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.11 ist $f + g$ also Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b (\phi_1 + \phi_2)(x)\,dx \le \int_a^b (f+g)(x)\,dx \le \int_a^b (\phi_1 + \phi_2)(x)\,dx + \varepsilon. \tag{12}$$

Die linke Seite von (12) können wir wegen (11) mittels (2) weiter nach unten abschätzen:

$$\int_a^b \phi_1(x)\,dx + \int_a^b \phi_2(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die rechte Seite von (12) können wir wegen (11) mittels (2) weiter nach oben abschätzen:

$$\int_a^b \phi_1(x)\,dx + \int_a^b \phi_2(x)\,dx + \varepsilon \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.$$

Es gilt also

$$-\varepsilon < \int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$, somit $\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 0$ und folglich $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. Wir zeigen noch

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \tag{13}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda = 0$, so ist $\lambda f = 0 \in T_a^b$ Riemann-integrierbar und beide Seiten von (13) sind 0. Ist $\lambda > 0$ und M die Menge alle $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$, so ist $\{\lambda\phi\colon \phi \in M\}$ die Menge aller Treppenfunktionen $\geq \lambda f$ und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{a\,*}^{b} \lambda f(x)\,dx &= \sup\left\{\int_a^b \lambda\phi(x)\,dx\colon \phi \in M\right\} \\
&= \sup \lambda \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in M\right\} \\
&= \lambda \sup \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in M\right\} \\
&= \lambda \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Analog sieht man $\int_{a\,*}^{b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$. Somit ist λf Riemann-integrierbar und (13) gilt. Ist $\lambda < 0$ und M wie zuvor, so ist $\{\lambda\phi\colon \phi \in M\}$ die Menge aller Treppenfunktionen ψ mit $\psi \geq \lambda f$ und somit ähnlich dem Vorigen

$$\int_a^{b^*} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Analog ist $\int_{a*}^{b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{b^*} f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$. Also ist λf Riemann-integrierbar und (13) gilt.

(b) Sei $f \leq g$. Ist $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$, so gilt auch $\phi \leq g$. Folglich ist

$$\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ und } \phi \leq f\right\} \subseteq \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx\colon \phi \in T_a^b \text{ und } \phi \leq g\right\}$$

und für die Suprema der zwei Zahlenmengen folgt $\int_{a*}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a*}^{b} g(x)$. Also ist $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Da für die konstanten Funktionen mit den im Lemma beschriebenen Werten m und M

$$m \le f \le M$$

gilt, liefert die gerade nachgewiesene Monotonie

$$(b-a)m = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = (b-a)M.$$

(c) Sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar, so gibt es nach Lemma 1.11 Treppenfunktionen $\phi_1, \psi_1 \in T_a^c$ und $\phi_2, \psi_2 \in T_c^b$ mit $\phi_1 \le f|_{[a,c]} \le \psi_1$ und $\phi_2 \le f|_{[c,b]} \le \psi_2$ derart, dass

$$\int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\,dx \le \varepsilon/2 \text{ und } \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\,dx \le \varepsilon/2.$$

Wir definieren $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \le f \le \psi$ stückweise via $\phi(x) := \phi_1(x)$ und $\psi(x) := \psi_1(x)$ wenn $x \in [a,c]$ bzw. $\phi(x) := \phi_2(x)$ und $\psi(x) := \psi_2(x)$ wenn $x \in [c,b]$. Nach Lemma 1.6(c) ist dann

$$\int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\,dx = \int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\,dx + \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\,dx \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Nach Lemma 1.11 ist f also Riemann-integrierbar und es ist

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \int_c^b \phi_2(x)\,dx &= \int_a^b \phi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \phi(x)\,dx + \varepsilon \\ &= \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \int_c^b \phi_2(x)\,dx + \varepsilon. \end{aligned} \tag{14}$$

Da nach Lemma 1.11 zudem $\int_a^c \phi_1(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx \le \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \varepsilon/2$ und $\int_c^b \phi_2(x)\,dx \le \int_c^b f(x)\,dx \le \int_c^b \phi_2(x)\,dx + \varepsilon/2$, folgt aus (14) die Ungleichung

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - \varepsilon \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (7).

Ist umgekehrt f als Riemann-integrierbar angenommen, so gibt es $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\, dx \leq \varepsilon$. Definieren wir $\phi_1 := \phi|_{[a,c]}$, $\psi_1 := \psi|_{[a,c]}$, $\phi_2 := \phi|_{[c,b]}$ und $\psi_2 := \psi|_{[c,b]}$, so sind $\phi_1, \psi_1 \in T_a^c$, $\phi_2, \psi_2 \in T_c^b$ und $\phi_1 \leq f|_{[a,c]} \leq \psi_1$, $\phi_2 \leq f|_{[c,b]} \leq \psi_2$ sowie

$$\int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\, dx \leq \varepsilon \text{ und } \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\, dx \leq \varepsilon,$$

da beide Integrale nicht-negativ sind und

$$\int_a^c (\psi_1(x) - \phi_1(x))\, dx + \int_c^b (\psi_2(x) - \phi_2(x))\, dx = \int_a^b (\psi(x) - \phi(x))\, dx \leq \varepsilon$$

nach Lemma 1.6 (c). Folglich sind $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar.

Sei nun f Riemann-integrierbar und seien $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. Gilt (8) für α, β, γ, so auch für γ, β, α an Stelle der vorigen, denn es ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma^\alpha f(x)\, dx &= -\int_\alpha^\gamma f(x)\, dx = -\int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \int_\beta^\gamma f(x)\, dx \\ &= \int_\gamma^\beta f(x)\, dx + \int_\beta^\alpha f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Nachdem wir notfalls α und γ vertauschen, brauchen wir (8) daher nur zu beweisen, wenn $\alpha \leq \gamma$ ist (was wir nun annehmen).

Fall 1: Ist $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, so gilt (8) nach (7) (mit α, β, γ an Stelle von a, c, b).

Fall 2: Ist $\beta \leq \alpha$, so ist nach (7) $\int_\beta^\gamma f(x)\, dx = \int_\beta^\alpha f(x)\, dx + \int_\alpha^\gamma f(x)\, dx$. Addition von $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\, dx$ auf beiden Seiten liefert (8).

Fall 3: Ist $\beta \geq \gamma$, so ist nach (7) $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\, dx + \int_\gamma^\beta f(x)\, dx$. Addition von $\int_\beta^\gamma f(x)\, dx = -\int_\gamma^\beta f(x)\, dx$ auf beiden Seiten liefert (8).

(d) Es gilt $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$ und somit

$$-(b-a)\|f\|_\infty = \int_a^b \|f\|_\infty\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty\, dx = (b-a)\|f\|_\infty,$$

woraus (9) folgt. Wir werden gleich zeigen, dass die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ Riemann-integrierbar ist (siehe Bemerkung 1.16). Da

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \text{für alle } x \in [a,b],$$

folgt (10) aus der in (b) gezeigten Monotonie des Riemann-Integrals. $\square$

Zum Beweis der Riemann-Integrierbarkeit von $x \mapsto |f(x)|$ (und wegen ihrer sonstigen Nützlichkeit) führen wir den Positivteil und Negativteil einer Funktion ein.

Definition 1.15 Wir definieren den *Positivteil* einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ als die durch

$$f_+ := \max\{f, 0\}$$

gegebene Funktion $f_+\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Der *Negativteil* von f ist definiert als

$$f_- := (-f)_+.$$

Für $x \in [a,b]$ ist also $f_+(x) = f(x)$, wenn $f(x) \geq 0$ und $f_+(x) = 0$, wenn $f(x) < 0$. Weiter ist $f_-(x) = f(x)$, wenn $f(x) \leq 0$ und $f_-(x) = 0$, wenn $f(x) > 0$.

Man beachte, dass

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \text{ und } |f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \text{ für alle } x \in [a,b]. \quad (15)$$

Bemerkung 1.16 Wir werden sehen (siehe Satz 1.21):

Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so sind auch $f_+\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f_-\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

Dies hat schöne Folgerungen:

(a) Es ist dann auch die Funktion

$$[a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

Riemann-integrierbar, nach Satz 1.14 (a).

(b) Wir erhalten eine schöne Interpretation des Riemann-Integrals:

Es ist $f_+ \geq 0$, $f_- \geq 0$ und $f = f_+ - f_-$, somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx.$$

Das Integral von f lässt sich also als Differenz des oberhalb der x-Achse mit dem Graphen von f eingeschlossenen Flächeninhalts und des unterhalb der x-Achse mit dem Graphen eingeschlossenen Flächeninhalt interpretieren.

Riemann-integrierbare Funktionen kann man an endlich vielen Stellen abändern, ohne etwas an der Integrierbarkeit und dem Wert des Integrals zu ändern.

Bemerkung 1.17 Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die sich nur an endlich vielen Stellen $x_1 < \cdots < x_m$ von f unterscheidet, so ist auch g Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es ist nämlich $h := g - f = \sum_{j=1}^m (g(x_j) - f(x_j))\, 1_{\{x_j\}}$ eine Funktion mit endlichem Träger, also eine Treppenfunktion (siehe Beispiel 1.4) und somit Riemann-integrierbar. Also ist auch

$$g = f + h$$

Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

wobei das Integral über h gleich 0 ist (vgl. Beispiel 1.4).

Neue Riemann-integrierbare Funktionen aus gegebenen

Wir untersuchen nun, wie sich aus gegebenen Riemann-integrierbaren Funktionen neue gewinnen lassen. Eine Möglichkeit sind Grenzprozesse. In der Analysis 1 haben wir gesehen, dass gleichmäßige Grenzwerte von Folgen stetiger Funktionen stetig sind. Wir wollen nun Entsprechendes für Riemann-integrierbare Funktionen beweisen. Zunächst sei kurz an Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen erinnert:

1.18 Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\, \underbrace{(\forall x \in X)\ |f_n(x) - f(x)| \ \leq\ \varepsilon}_{\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon}.$$

Die Funktionenfolge ist dann insbesondere *punktweise* gegen f konvergent, d.h. für jedes $x \in X$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $f(x)$ konvergente Folge reeller Zahlen.[3]

Satz 1.19 *Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist auch f Riemann-integrierbar und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{16}$$

Für gleichmäßige Grenzwerte gilt somit

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx; \tag{17}$$

Grenzwert und Integral dürfen hier also vertauscht werden.

Beweis. Die Aussage ist trivial wenn $a = b$; sei daher nun $a < b$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{für alle } x \in [a,b]. \tag{18}$$

Sei $n \geq N$. Da f_n Riemann-integrierbar ist, gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ derart, dass $\phi \leq f_n \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx \; < \; \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definieren wir

$$\Phi(x) := \phi(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{und} \quad \Psi(x) := \psi(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

[3] Allgemeiner: Ist X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum, so nennt man eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon X \to Y$ *gleichmäßig konvergent* gegen eine Funktion $F\colon X \to Y$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in X)\; d_Y(f_n(x), f(x)) \;\leq\; \varepsilon.$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge insb. punktweise gegen f, es konvergiert also für jedes $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in (Y, d_Y) gegen $f(x)$; in Formeln:

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\; d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

für $x \in [a,b]$, so sind $\Phi, \Psi \in T_a^b$ und

$$\Phi(x) \leq f_n(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f(x)$$

für alle $x \in [a,b]$ wegen (18). Analog gilt

$$\Psi(x) \geq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \geq f(x).$$

Somit haben wir $\Phi \leq f \leq \Psi$, woraus

$$-\infty < \inf \Phi([a,b]) \leq \inf f([a,b]) \leq \sup f([a,b]) \leq \sup \Psi([a,b]) < \infty$$

und somit Beschränktheit der Funktion f folgt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx \\
&\qquad = \int_a^b \psi(x)\,dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,dx \\
&\qquad = \int_a^b (\psi - \phi)(x)\,dx + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.11 ist also f Riemann-integrierbar. Wegen der Monotonie und Linearität des Integrals folgt aus

$$f_n - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leq f \leq f_n + \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

dass

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - \underbrace{\int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,dx}_{=\varepsilon/3} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f_n(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\varepsilon}{(3(b-a)}\,dx}_{=\varepsilon/3}$$

und somit

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$. Also gilt (16). $\square$

Bemerkung 1.20 Punktweise Konvergenz Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ impliziert nicht Riemann-Integrierbarkeit der Grenzfunktion f; ein Gegenbeispiel lernen wir in der Übung kennen.

Wir zeigen den folgenden Satz und stellen als Hilfsmittel für den Beweis einige Sachverhalte bereit, die auch anderweitig von Nutzen sind.

Satz 1.21 *Es seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

(a) *Der Positivteil $f_+\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und der Negativteil $f_-\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ von f sind Riemann-integrierbar.*

(b) *Die Funktion $|\cdot| \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ ist Riemann-integrierbar.*

(c) *Die Funktion $fg\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ ist Riemann-integrierbar.*

(d) *Ist $f \geq 0$, so ist die Funktion $\sqrt{\cdot} \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ Riemann-integrierbar.*

In der Analysis 1 haben wir stärkere Stetigkeitseigenschaften kennengelernt wie gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit. Zur Erinnerung:[4]

1.22 Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn eine reelle Zahl $L \geq 0$ existiert derart, dass

$$|f(y) - f(x)| \;\leq\; L\,|y - x| \quad \text{für alle } x, y \in [a,b].$$

Man nennt L dann eine *Lipschitzkonstante* für f.

Lemma 1.23 *Seien $a \leq b$ und $c \leq d$ reelle Zahlen und $\theta\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige, monoton wachsende Funktion. Dann ist die Komposition*

$$\theta \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \theta(f(x))$$

Riemann-integrierbar für alle reellen Zahlen $a \leq b$ und jede Riemann-integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f([a,b]) \subseteq [c,d]$.

[4] Allgemeiner: Gegeben metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) nennt man eine Abbildung $f\colon X \to Y$ *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L \in [0, \infty[$ existiert mit $d_Y(f(y), f(x)) \leq L\, d_X(x,y)$ für alle $x, y \in X$.

Beweis. Es sei L eine Lipschitzkonstante für θ. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wie im Lemma. Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\phi, \psi \in T_a^b$ derart, dass $\phi \leq f \leq \psi$ und
$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx < \varepsilon.$$
Nach dem wir notfalls ψ durch $\min\{\psi, d\}$ ersetzen und ϕ durch $\max\{\phi, c\}$ (was die vorige Differenz höchstens verkleinert), dürfen wir annehmen, dass

$$\phi([a,b]) \subseteq [c,d] \quad \text{und} \quad \psi([c,d]) \subseteq [c,d].$$

Wir wählen eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a,b]$ derart, dass für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$ die Funktionen ϕ und ψ auf $]t_{j-1}, t_j[$ konstant sind; sei c_j bzw. c_j' der dortige Funktionswert. Dann ist $\theta \circ \phi$ auf $]t_{j-1}, t_j[$ konstant mit Funktionswert $\theta(c_j)$ und $\theta \circ \psi$ hat dort den Funktionswert $\theta(c_j')$; also ist

$$\theta \circ \phi \in T_a^b \quad \text{und} \quad \theta \circ \psi \in T_a^b.$$

Da θ monoton wachsend ist, folgt für alle $x \in [a,b]$ aus $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, dass
$$\theta(\phi(x)) \leq \theta(f(x)) \leq \theta(\psi(x));$$
also ist $\theta \circ \phi \leq \theta \circ f \leq \theta \circ \psi$. Man beachte, dass

$$c_j \leq c_j'$$

für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$, denn für $t \in]t_{j-1}, t_j[$ ist

$$c_j = \phi(t) \leq f(t) \leq \psi(t) = c_j'.$$

Also ist $\theta(c_j) \leq \theta(c_j')$ und somit $\theta(c_j') - \theta(c_j) \geq 0$, also

$$\theta(c_j') - \theta(c_j) = |\theta(c_j') - \theta(c_j)|.$$

Ebenso ist $|c'_j - c_j| = c'_j - c_j$. Wir folgern, dass

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \theta(\psi(x))\,dx - \int_a^b \theta(\phi(x))\,dx \\
&\quad = \sum_{j=1}^n (\theta(c_j) - \theta(c'_j))(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \underbrace{|\theta(c_j) - \theta(c'_j)|}_{\leq L\,|c'_j - c_j|}(t_j - t_{j-1}) \\
&\quad \leq L \sum_{j=1}^n |c'_j - c_j|\,(t_j - t_{j-1}) = L \sum_{j=1}^n (c'_j - c_j)\,(t_j - t_{j-1}) \\
&\quad = L\left(\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx\right) \\
&\quad \leq L\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $L\,\varepsilon$ beliebig klein gemacht werden kann, ist $\theta \circ f$ nach Lemma 1.11 Riemann-integrierbar. □

Die folgende Bemerkung ist nicht prüfungsrelevant.

Bemerkung 1.24 Man kann zeigen, dass die Schlussfolgerung von Lemma 1.23 gültig bleibt, wenn $\theta\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion ist (die also weder monoton zu sein braucht noch Lipschitz-stetig). Der Beweis dieses allgemeineren Resultats wäre jedoch äußerst technisch und der obige Spezialfall genügt uns. Bei Bedarf finden Sie ihn z.B. im Vorlesungsskript von Prof. Glöckner zur Analysis 2 im SoSe 2019 (das auf der Homepage und in PANDA verfügbar ist).[5]

Sehr viele Funktionen sind Lipschitz-stetig. Zum Beispiel gilt für alle $a < b$:

[5] Wir schreiben $L([a,b]) := b - a$ für die Länge des Intervalls $[a,b]$. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ wird eine *Lebesgue-Nullmenge* genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen beschränkten Intervallen I_n mit $M \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ existiert mit Gesamtlänge $\sum_{n=1}^\infty L(I_n) < \varepsilon$. Nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium ist eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge $U_f := \{x \in [a,b]\colon f \text{ ist nicht an der Stelle } y \text{ stetig}\}$ aller Unstetigkeitsstellen von f eine Lebesgue-Nullmange ist. Ist $\theta\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und $f([a,b]) \subseteq [c,d]$, so ist $\theta \circ f$ stetig an jeder Stelle, an der f stetig ist, also $U_{\theta\circ f} \subseteq U_f$. Da Teilmengen von Lebesgue-Nullmengen offenbar ebenfalls Lebesgue-Nullmengen sind, ist $U_{\theta\circ f}$ eine Lebesgue-Nullmenge und somit $\theta \circ f$ Riemann-integrierbar.

Lemma 1.25 *Jede stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und die Supremumsnorm*

$$\|f'\|_\infty$$

der Ableitung ist eine Lipschitzkonstante für f.

Der Vollständigheit halber geben wir den Beweis an, überspringen ihn aber in der Vorlesung, da das Resultat in der Hausübung 1 des 14. Übungsblatts zur Analysis 1 von Prof. Glöckner im WS 2024/25 bereits behandelt wurde.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $L := \|f'\|_\infty$ eine Lipschitz-Konstante für f ist. Seien $x, y \in [a,b]$. Ist $x = y$, so gilt trivialerweise

$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|x-y|,$$

denn beide Seiten der Ungleichung sind dann 0. Sei nun also $x \neq y$. Beide Seiten der Ungleichung

$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|x-y|$$

bleiben unverändert, wenn wir x und y vertauschen. Wir dürfen zu ihrem Nachweis also annehmen, dass $x < y$ ist. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dann ein $\xi \in \,]x,y[$ derart, dass

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi).$$

Folglich ist

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

und somit

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)|\,|y-x| \leq \|f'\|_\infty |y-x| = L\,|y-x|,$$

wie benötigt. □

In der Vorlesung überspringen wir die folgende Bemerkung.

Bemerkung 1.26 In der Situation von Lemma 1.25 ist $\|f'\|_\infty$ die *kleinstmögliche* Lipschitzkonstante für f.

Ist nämlich auch L eine Lipschitzkonstante, so gilt für alle $x, y \in [a,b]$ mit $y \neq x$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L \, \frac{|y - x|}{|y - x|} = L.$$

Für $y \to x$ konvergiert die linke Seite gegen $|f'(x)|$. Die Ungleichung bleibt beim Grenzübergang bestehen, es ist also

$$|f'(x)| \leq L.$$

Dies galt unabhängig von x; also ist

$$\|f'\|_\infty = \sup\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\} \leq L.$$

Beweis von Satz 1.21. (a) Es ist $f([a,b]) \subseteq [-r,r]$ für ein $r \geq 0$. Die Funktion

$$h \colon [-r,r] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_+ := \max\{x, 0\}$$

ist offensichtlich monoton wachsend. Zudem ist h Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$. Hierzu müssen wir für $x, y \in [-r,r]$ die Ungleichung

$$|h(y) - h(x)| \leq L \, |y - x| = |y - x|$$

nachweisen. Da beide Seiten bei Vertauschen von x und y unverändert bleiben, dürfen wir annehmen, dass $x \leq y$. Es gibt drei Fälle:

Ist $y \leq 0$ und somit auch $x \leq 0$, so ist $h(x) = h(y) = 0$ und somit $|h(y) - h(x)| = 0 \leq |y - x|$.

Ist $x \leq 0$ und $y \geq 0$, so ist $h(x) = 0$, $h(y) = y$ und $|h(y) - h(x)| = |y - 0| = |y| = y \leq y - x = |y - x|$.

Ist $x \geq 0$ und somit auch $y \geq 0$, so ist $h(x) = x$ und $h(y) = y$ und folglich $|h(y) - h(x)| = |y - x| = y - x = |y - x| \leq |y - x|$.

Nach Lemma 1.23 ist also $f_+ = h \circ f$ Riemann-integrierbar. Da $f_- = (-f)_+$ und $-f$ Riemann-integrierbar ist, ist nach dem Vorigen auch f_- Riemann-integrierbar.

(b) Da f_+ und f_- nach (a) Riemann-integrierbar sind, ist nach Satz 1.11 (a) auch $|f| = f_+ + f_-$ Riemann-integrierbar.

(c) Wir stellen zunächst die Vorüberlegung an, dass $f^2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)^2 = f(x)f(x)$ Riemann-integrierbar ist; ist nämlich $f([a,b]) \subseteq [-r,r]$ mit $r \geq 0$, so ist

$$f^2 = |f|^2 = h \circ |f|$$

mit der Funktion

$$h\colon [0,r] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Hierbei ist $|f|$ nach (b) Riemann-integrierbar. Die Funktion h ist monoton wachsend und nach Lemma 1.25 zudem Lipschitz-stetig. Nach Lemma 1.23 ist f^2 also Riemann-integrierbar.

Für jedes $x \in [a,b]$ ist nach der binomischen Formel

$$\frac{1}{2}\left((f(x)+g(x))^2 - f(x)^2 - g(x)^2\right) = f(x)g(x).$$

Also ist

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right),$$

wobei $f+g$ nach Satz 1.11 (a) Riemann-integrierbar ist, die rechte Seite somit nach der Vorüberlegung und Satz 1.11 (a) Riemann-integrierbar.

(d) Es ist $f([a,b]) \subseteq [0,r]$ für ein $r > 0$. Wir nehmen zunächst an, dass $f([a,b]) \subseteq [\varepsilon, r]$ für ein $\varepsilon \in \,]0,r[$. Dann ist

$$h\colon\ [\varepsilon,r] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig differenzierbar und somit Lipschitz-stetig nach Lemma 1.25. Weiter ist h monoton wachsend. Also ist $\sqrt{f} = h \circ f$ Riemann-integrierbar nach Lemma 1.23.

Ist f beliebig, so definieren wir $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ via

$$f_n(x) := f(x) + \frac{1}{n}.$$

Da $|f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{n}$ für alle $x \in [a,b]$, gilt $\|f - f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$. Die Funktionen f_n konvergieren also gleichmäßig gegen f. Da $1/n \leq 1$, gilt weiter

$$f_n([a,b]) \subseteq [0, r+1]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Funktion

$$g\colon [0,r+1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig ist, konvergieren die Funktionen

$$\sqrt{f_n} = g \circ f_n$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $g \circ f = \sqrt{f}$, nach dem folgenden Lemma. Nach Satz 1.19 ist also $\sqrt{f}$ Riemann-integrierbar. $\square$

Lemma 1.27 *Seien $a \leq b$ und $c \leq d$ reelle Zahlen, $\theta\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f_n([a,b]) \subseteq [c,d]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch $f([a,b]) \subseteq [c,d]$ und die Folge der Funktionen $\theta \circ f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $\theta \circ f$.*

Beweis. Für jedes $x \in [a,b]$ gilt $f_n(x) \in [c,d]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit auch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [c,d];$$

da die Menge $[c,d]$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Also ist $f([a,b]) \subseteq [c,d]$.

Da der Definitionsbereich der stetigen Funktion θ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist, ist θ gleichmäßig stetig (siehe Satz IV.1.26 im Analysis 1-Skript von Prof. Neeb). Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall y, z \in [c,d])\ |z - y| < \delta \ \Rightarrow\ |\theta(z) - \theta(y)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Da die Folge der Funktionen f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N)(\forall x \in [a,b])\ \ |f_n(x) - f(x)| < \delta. \tag{20}$$

Für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a,b]$ können wir in (19) wegen (20) $y = f(x)$, $z = f_n(x)$ wählen und erhalten

$$|\theta(f(x)) - \theta(f_n(x))| < \varepsilon.$$

Also konvergiert $\theta \circ f_n$ gleichmäßig gegen $\theta \circ f$. □

Mittelwertsatz der Integralrechnung und Hauptsatz

Satz 1.28 (*Mittelwertsatz der Integralrechnung*). *Sind $a < b$ reelle Zahlen und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ derart, dass*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi). \tag{21}$$

Die linke Seite von (21) *stimmt auch mit $\frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx$ überein.*

Mit der konstanten Funktion $g(x) := 1$ folgt dies aus:

Satz 1.29 (*Verallgemeinerter Mittelwertsatz*). *Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $g \geq 0$ und $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ derart, dass*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Nach dem Satz vom Maximum gibt es $x_*, x^* \in [a,b]$ derart, dass

$$f(x^*) = \max f([a,b]) \quad \text{und} \quad f(x_*) = \min f([a,b]).$$

Dann gilt für alle $x \in [a,b]$

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*).$$

Die Ungleichungen bleiben bei Multiplikation mit $g(x) \geq 0$ bestehen:

$$f(x_*)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x^*)g(x).$$

Integration über $x \in [a,b]$ liefert

$$f(x_*)\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq f(x^*)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Wir teilen durch $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ und erhalten

$$f(x_*) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq f(x^*).$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen auf Intervallen gibt es ein ξ zwischen x_* und x^* derart, dass

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Auflösen nach $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ liefert die Behauptung. □

Definition 1.30 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ wird eine *Stammfunktion* für f genannt, wenn $F' = f$.

Bemerkung 1.31 Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig: Sind F und G Stammfunktionen für $f\colon I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

und somit ist $G - F$ eine konstante Funktion (mit dem Wert $C \in \mathbb{R}$ etwa), nach Folgerung 2 aus dem Skript zur Analysis 1 von Prof. Glöckner zu den Vorlesungen am 23.1.2025, 28.1.2025 und 30.1.2025. Also ist $G - F = C$ und somit

$$G = F + C.$$

Definition 1.32 Ist $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall I und sind $a, b \in I$, so schreiben wir

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Bemerkung 1.33 Sind F und G Stammfunktionen einer stetigen Funktion f, so ist $[F(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$, da die additive Konstante mit positivem und negativem Vorzeichen vorkommt und in der Summe aufhebt.

Satz 1.34 (*Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung*). *Seien $a < b$ reelle Zahlen.*

(a) *Für jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist*

$$F\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

eine Stammfunktion für f.

(b) *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b \tag{22}$$

und $\int_b^a f(x)\, dx = [F(x)]_b^a$.

(c) *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \quad \textit{für alle } x \in [a,b].$$

Beweis. (a) Sei $x \in [a,b]$. Gegeben $y \in [a,b] \setminus \{x\}$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein ξ_y zwischen x und y derart, dass

$$\begin{aligned} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} &= \frac{1}{y-x}\left(\underbrace{\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}_{=\int_x^y f(t)\,dt}\right) \\ &= \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt = f(\xi_y); \end{aligned}$$

hierbei wurde die Intervalladditivität des Riemann-Integrals benutzt, um die Differenz der zwei Integrale zu einem Integral zusammenzufassen. Da ξ_y zwischen x und y liegt, folgt $\xi_y \to x$ für $y \to x$ und somit $f(\xi_x) \to f(x)$, da f stetig ist.[6] Also gilt

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \to f(x)$$

für $y \to x$. Folglich ist F an der Stelle x differenzierbar mit Ableitung $F'(x) = f(x)$ und somit ist F eine Stammfunktion für f.

(c) Nach (a) ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f'(t)\,dt$ eine Stammfunktion für f', also $F' = f'$. Somit ist

$$(f-F)' = f' - F' = f' - f' = 0.$$

Nach Folgerung 2 aus dem Skript zur Analysis 1 von Prof. Glöckner zu den Vorlesungen am 23.1.2025, 28.1.2025 und 30.1.2025 ist $f - F$ konstant, etwa $f-F$ die Funktion mit dem konstanten Wert $C \in \mathbb{R}$. Dann ist also $f = C+F$. Um die Konstante zu bestimmen, setzen wir $x = a$ ein:

$$f(a) = C + F(a) = C + \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = C.$$

[6] Die Grenzwerte sind hier im Sinne von Funktionenlimites zu verstehen, d.h. Sie nehmen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \to x$, betrachten die zugehörigen ξ_{y_n} und $f(\xi_{y_n})$ und lassen $n \to \infty$ streben.

Also ist $f(x) = C + F(x) = f(a) + \int_a^c f(t)\,dt$. Insbesondere folgt mit $x := b$:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt. \tag{23}$$

(b) Sei F eine Stammfunktion von f. Ersetzen wir f durch F in (23) und f' durch $F' = f$, so folgt $F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\,dt$. Wir substrahieren $F(a)$ auf beiden Seiten und erhalten (22). $\square$

Bemerkung 1.35 (a) In der Situation von Satz 1.34 (b) ist

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = -[F(x)]_a^b = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a.$$

(b) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a,b]$, so ist auch $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_c^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion für f, denn nach Satz 1.34 (c) ist $G(x) = F(x) - F(c)$ für alle $c \in [a,b]$ und somit $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

Integrationsregeln

Wir können nun die zwei wichtigsten Integrationsregeln formulieren und beweisen. Der Abschnitt wurde in der Vorlesung übersprungen, da er uns aus der Analysis 1 bekannt ist.

Satz 1.36 (*Partielle Integration*). *Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, und $a, b \in I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $(fg)' = f'g + fg'$. Da fg eine Stammfunktion für $(fg)'$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
[f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\
&= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Substrahieren wir $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ auf beiden Seiten der Gleichung, so folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 1.37 Es ist

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x\,dx = 1e^1 - 0 - e^1 + e^0 = 1$$

unter Benutzung von partieller Integration mit $f(x) := x$, $f'(x) = 1$, $g(x) := e^x$, $g'(x) = e^x$.

Satz 1.38 (*Substitutionsregel*). *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ nicht entartete Intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(J) \subseteq I$. Dann gilt für alle $a, b \in J$*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion für f. Nach der Kettenregel gilt dann

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g',$$

es ist also $F \circ g$ eine Stammfunktion für $(f \circ g)g'$. Somit gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [(F \circ g)(x)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du,$$

wie behauptet. □

Bemerkung 1.39 Wendet man die Substitutionsregel an, so setzt man also formal $u = g(x)$ im Integral und schreibt $g'(x)dx = du$. Aus den Integrationsgrenzen $x = a$ bzw. $x = b$ wird weiter $u = g(a)$ bzw. $u = g(b)$. So kann man sich die Regel gut merken bzw. beim Rechnen einsetzen.

Bemerkung 1.40 Es ist meist nicht so schwierig, die Substitutionsregel "von links nach rechts" zu benutzen, also das linke Integral durch Berechnung des rechten zu bestimmen. Man kann die Regel aber auch "von rechts nach links" anwenden, sucht also das rechte Integral und muss eine geeignete Funktion g erst erraten, umd die linke Seite hinschreiben und ausrechnen zu können. Dies erfordert Übung und Erfahrung und kann geradezu eine Kunst sein. Sie werden typische Beispiele kennenlernen.

Beispiel 1.41 Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\,\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} g'(x)\cos(g(x))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos u\,du = 0\end{aligned}$$

mit $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$.

Beispiel 1.42 Um das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

zu berechnen, beobachten wir, dass $0 = \sin(0)$ und $1 = \sin(\pi/2)$. Das Integral stimmt also mit

$$\int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

überein. Wir lesen nun die Substitutionsregel von rechts nach links mit x statt u und t statt x, mit der Substitution $x = \sin(t)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\sin'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt = \left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Bemerkung 1.43 Traditionell schreibt man $\int f(x)\,dx$ für die Menge aller Stammfunktionen für f und nennt diese Menge das *unbestimmte Integral* von f. Ist F eine Stammfunktion, so ist nach Bemerkung 1.31 also

$$\int f(x)\,dx = \{F + C \colon C \in \mathbb{R}\}.$$

Traditionell lässt man die Mengenklammern weg und schreibt kurz $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. In dieser Vorlesung werden diese Notationen kaum benutzt.

Riemannsche Summen

Wir erläutern einen alternativen Zugang zu Riemann-Integrierbarkeit und dem Riemann-Integral.

Definition 1.44 Die *Maschenweite* $\mathrm{mesh}(Z)$ einer Zerlegung

$$Z = \{a = t_0 < \cdots < t_m = b\}$$

eines Intervalls $[a, b]$ mit $a < b$ ist definiert als das Maximum

$$\mathrm{mesh}(Z) := \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_m - t_{m-1}\}$$

der Längen der Teilintervalle. Eine *Belegung* von Z ist ein m-Tupel $B = (b_1, \ldots, b_m)$ von Zahlen

$$b_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

für $k \in \{1, \ldots, m\}$. Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so definieren wie ihre *Riemannsche Summe* $S_f(Z, B)$ zur Zerlegung Z und Belegung B als

$$S_f(Z, B) := \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) f(b_k).$$

Man beachte, dass

$$S_f(Z, B) = \int_a^b \phi(x)\, dx \tag{24}$$

für die Treppenfunktion

$$\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(b_k) & \text{wenn } x \in \,]t_{k-1}, t_k[\, \text{ mit } k \in \{1, \ldots, m\}; \\ f(t_k) & \text{wenn } x = t_k \text{ für ein } k \in \{0, \ldots, m\}. \end{cases} \tag{25}$$

Satz 1.45 *Gegeben reelle Zahlen $a < b$ sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist Riemann-integrierbar.*

(b) *Für jede Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[a, b]$ mit Maschenweite* $\mathrm{mesh}(Z_n) \to 0$ *und jede Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Belegungen B_n von Z_n ist die Folge $(S_f(Z_n, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Riemannschen Summen konvergent.*

Ist dies der Fall, so gilt in der Situation von (b) *stets*

$$\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n, B_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass in der Situation von (b) der Grenzwert I unabhängig von den gewählten Zerlegungen und Belegungen ist. Sind nämlich $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zerlegungen mit Maschenweite $\to 0$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen zugehöriger Belegungen, so definiert $(Z_1, Z'_1, Z_2, Z'_2, \ldots)$ eine Folge $(Z''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit Maschenweite $\to 0$ und $(B_1, B'_1, B_2, B'_2, \ldots)$ definiert eine Folge $(B''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehöriger Belegungen. Da $(S_f(Z_n, B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(S_f(Z'_n, B'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(S_f(Z''_n, B''_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sind, gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n, B_n) = \lim_{n\to\infty} S_f(Z''_n, B''_n) = \lim_{n\to\infty} S_f(Z'_n, B'_n).$$

Seien wir nun in der Situation von (b). Wir wählen eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit Maschenweite $\to 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $a = t_0 < \cdots < t_m = b$. Für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es ein $b_k \in \,]t_{k-1}, t_k[$ derart, dass

$$\sup f(]t_{k-1}, t_k[) \leq f(b_k) + \frac{1}{n}.$$

Sie $B_n := (b_1, \ldots, b_m)$. Wir definieren $\psi_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ via $\psi_n(t_k) := f(t_k)$ für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$,

$$\psi_n(t) := f(b_k) + \frac{1}{n} \quad \text{für } k \in \{1, \ldots m\} \text{ und } t \in \,]t_{k-1}, t_k[.$$

Für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es ein $c_k \in \,]t_{k-1}, t_k[$ derart, dass

$$\inf f(]t_{k-1}, t_k[) \geq f(c_k) - \frac{1}{n}.$$

Sei $C_n := (c_1, \ldots, c_m)$. Wir definieren $\phi_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ via $\phi_n(t_k) := f(t_k)$ für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$,

$$\phi_n(t) := f(c_k) - \frac{1}{n} \quad \text{für } k \in \{1, \ldots m\} \text{ und } t \in \,]t_{k-1}, t_k[.$$

Dann sind $\phi_n, \psi_n \in T_a^b$ und $\phi \leq f \leq \psi$. Per Voraussetzung existieren die Grenzwerte für $n \to \infty$ von

$$S_f(Z_n, B_n) = \int_a^b \psi_n(x) - \frac{1}{n}\,dx = \int_a^b \psi_n(x)\,dx - \frac{b-a}{n}$$

und
$$S_f(Z_n, C_n) = \int_a^b \phi_n(x) + \frac{1}{n}\, dx \int_a^b \phi_n(x)\, dx + \frac{b-a}{n}$$
und sie sind nach der Vorüberlegung gleich (nämlich gleich I). Da $\frac{b-a}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, existieren also auch die folgenden Grenzwerte und sind gleich I:
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx.$$
Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es somit ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass
$$\int_a^b \psi_n(x)\, dx - \int_a^b \phi_n(x)\, dx < \varepsilon.$$
Also ist f Riemann-integrierbar, nach Lemma 1.11. Da
$$\int_a^b \phi_n(x)\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b \psi_n(x)\, dx$$
für jedes $n \in \mathbb{N}$ (per Definition des Ober- bzw. Unterintegrals), wobei die rechte und linke Seite gegen I konvergiert, konvergiert auch die konstante Folge in der Mitte gegen I (nach dem Sandwich-Kriterium). Es ist also $\int_a^b f(x)\, dx = I$.

Sei umgekehrt f als Riemann-integrierbar angenommen. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt derart, dass
$$\left| S_f(Z, B) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$
für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit Maschenweite $< \delta$ und jede Belegung B von Z. Nach Lemma 1.11 gibt es $\phi, \psi \in T_a^b$ mit $\phi \le f \le \psi$ und
$$\int_a^b \psi(x)\, dx - \int_a^b \phi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Es sei $a = s_0 < \cdots < s_\ell = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass für alle $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ die Treppenfunktionen ϕ und ψ beide konstant auf $]s_{j-1}, s_j[$ sind; es sei c_j bzw. d_j der konstante Wert. Dann ist
$$c_j = \phi(x) \le f(x) \le \psi(x) = d_j \quad \text{für alle } x \in]s_{j-1}, s_j[. \tag{26}$$

Es sei $\delta > 0$ so klein, dass
$$4\ell \|f\|_\infty \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sei nun $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit Maschenweite $< \delta$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine zugehörige Belegung. Es sei K die Menge aller $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass
$$s_j \in [t_{k-1}, t_k] \quad \text{für ein } \ j \in \{0, \ldots, \ell\}.$$
Man beachte, dass s_0 und s_ℓ in je genau einem der Intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ liegen (mit $k = 1$ bzw. $k = n$). Jedes s_j mit $j \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$ kann in bis zu zweien der Intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ liegen. Die Anzahl $\#K$ der Elemente von K ist somit höchstens
$$2 + 2(\ell - 1) = 2\ell.$$
Ist $k \in C := \{1, \ldots, n\} \setminus K$, so ist $[t_{k-1}, t_k] \subseteq \,]s_{j-1}, s_j[$ für ein $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ und somit $b_k \in \,]s_{j-1}, s_j[$, also nach (26)
$$\phi(x) = c_j = \phi(b_k) \le f(b_k) \le \psi(b_k) = \psi(x)$$
für alle $x \in [t_{k-1}, t_k]$ und somit
$$\phi(x) - \psi(x) \le f(x) - f(b_k) \le \psi(x) - \phi(x),$$
folglich
$$|f(x) - f(b_k)| \le \psi(x) - \phi(x) \quad \text{für alle } x \in [t_{k-1}, t_k].$$
Also ist
$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\, dx - f(b_k)(t_k - t_{k-1}) \right| &= \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) - f(b_k)\, dx \right| \\
&\le \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x) - f(b_k)|\, dx \\
&\le \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(x) - \phi(x)\, dx.
\end{aligned}$$
Für $k \in K$ hingegen ist
$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\, dx - f(b_k)(t_k - t_{k-1} \right| &\le \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\, dx \right| + |f(b_k)(t_k - t_{k-1}| \\
&\le \|f\|_\infty (t_k - t_{k-1}) + \|f\|_\infty (t_k - t_{k-1}) \\
&\le 2\|f\|_\infty (t_k - t_{k-1}) \le 2\|f\|_\infty \delta.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(b_k)(t_k - t_{k-1}) \right| & \\
\leq \;& \sum_{k=1}^n \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx - f(b_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \\
= \;& \sum_{k\in K} \underbrace{\left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx - f(b_k)(t_k - t_{k-1}) \right|}_{\leq 2\|f\|_\infty \delta} + \sum_{k\in C} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx - f(b_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \\
\leq \;& 2\|f\|_\infty \delta \# K + \sum_{k\in C} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(x) - \phi(x)\,dx \\
\leq \;& 4\ell \|f\|_\infty \delta + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(x) - \phi(x)\,dx \\
\leq \;& \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \psi(x) - \phi(x)\,dx < \varepsilon,
\end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. $\square$

2 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir geeignete Funktionen über beschränkte abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ integriert. Für manche Anwendungen möchte man Funktionen auch über andere Intervalle integrieren, z.B. über unbeschränkte Intervalle der Form $[a,\infty[$. Solche "uneigentlichen Integrale" definiert man als Grenzwerte von gewöhnlichen Riemann-Integralen über beschränkte abgeschlossene Teilintervalle.

Definition 2.1 Seien $a,b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f|_{[a,r]}$ für alle $r \in [a,b[$ Riemann-integrierbar ist.[7]

(a) Das *uneigentliche Integral von f über $[a,b[$* ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\nearrow b} \int_a^r f(x)\,dr,$$

wenn der linksseitige Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert. Ist dies der Fall, so sagen wir auch, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergiert*. Verlangt ist also, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{r_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

für jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b[$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = b$.

(b) Ist $f \geq 0$, so ist die Funktion $[a,b[\to [0,\infty[$, $r \mapsto \int_a^r f(x)\,dx$ monoton wachsend.[8] Setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup\left\{\int_a^r f(x)\,dx \colon r\in[a,b[\right\} \in [0,\infty],$$

so gilt für $n\to\infty$ also $\int_a^{r_n} f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ im Sinne von Konvergenz bzw. bestimmter Divergenz, für jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b[$ mit $r_n \to b$.

[7]Dies ist automatisch erfüllt, wenn f stetig ist.

[8]Denn $\int_a^R f(x)\,dx - \int_a^r f(x)\,dx = \int_r^R f(x)\,dx \geq 0$ für alle $r \leq R$ in $[a,b[$.

Satz 2.2 *Sind $a < b$ reelle Zahlen und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt*

$$\lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Riemann-Integral von f über $[a,b]$ stimmt also mit dem uneigentlichen Integral von $f|_{[a,b[}\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ über $[a,b[$ überein.

Beweis. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b[$ mit $r_n \to b$. Wegen der Intervalladditivität des Integrals gilt dann

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^{r_n} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{r_n}^b f(x)\,dx \right| \leq \|f\|_\infty (b - r_n) \to 0$$

für $n \to \infty$ und somit $\int_a^{r_n} f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ (wobei auch die Integralabschätzung aus Satz 1.14 (d) benutzt wurde). $\square$

Beispiel 2.3 Wir betrachten die Funktion $f\colon [-\pi, 0[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ und zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert.

Da $\sin(x)/x \to 1$ für $x \to 0$ (z.B. nach der l'Hospitalschen Regel), ist

$$\widetilde{f}\colon [-\pi, 0] \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{wenn } x \in [-\pi, 0[; \\ 1 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $[-\pi, 0]$ und somit Riemann-integrierbar. Nach Satz 2.2 konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\pi}^0 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{r\nearrow 0} \int_{-\pi}^r \widetilde{f}(x)\,dx$$

und stimmt mit $\int_{-\pi}^0 \widetilde{f}(x)\,dx$ überein.

Wir erinnern an allgemeine Potenzen: $x^n = (e^{\ln(x)})^n = e^{n\ln(x)}$ mit $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ verallgemeinernd definiert man

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und reelle Zahlen } x > 0.$$

Die Funktion $]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha\ln(x)}) = e^{\alpha\ln(x)}\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

wobei die Kettenregel benutzt wurde. Stammfunktionen sind also

$$\int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{wenn } \alpha \neq -1; \\ \ln(x) + C & \text{wenn } \alpha = -1. \end{cases}$$

Satz 2.4 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx < \infty$ *genau dann, wenn* $\alpha > 1$*;*

(b) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} \, dx < \infty$ *genau dann, wenn* $\alpha > 1$.

Beweis. (a) Der Fall $\alpha = 1$: Es gilt $\int_1^r \frac{1}{x} \, dx = \ln(r) \to \infty$ für $r \to \infty$. Ist $\alpha \neq 1$, so ist

$$\int_1^r \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \frac{r^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Ist $1-\alpha > 0$ (also $\alpha < 1$), so divergiert die rechte Seite der vorigen Gleichung bestimmt gegen ∞ für $r \to \infty$. Ist $1 - \alpha < 0$ (also $\alpha > 1$), konvergiert die rechte Seite gegen $\frac{1}{\alpha-1} < \infty$.

(b) Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[1, \infty[$ mit $r_n \to \infty$. Dann gilt $\ln(r_n) \to \infty$. Die Substitution $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x} \, dx$ führt auf

$$\int_1^{r_n} \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha} \, dx = \int_0^{\ln(r_n)} \frac{1}{u^\alpha} \, du.$$

Nach (a) ist die rechte Seite voriger Gleichung für $n \to \infty$ genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$, andernfalls bestimmt divergent. □

Satz 2.5 (Majorantenkriterium) *Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f, g\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass $f|_{[a,r]}$ und $g|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar sind für alle $r \in [a, b[$. Sei weiter $|f| \leq g$ (insbesondere also $g \geq 0$) und $\int_a^b g(x) \, dx < \infty$. Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) \, dx$.*

Beweis. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b[$ mit $r_n \to b$. Wir zeigen, dass die Integrale $y_n := \int_a^{r_n} f(x) \, dx$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge bilden. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Da $\int_a^{r_n} g(x) \, dx \to \int_a^b g(x) \, dx$, ist $(\int_a^{r_n} g(x) \, dx)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\int_a^{r_n} g(x) \, dx - \int_a^{r_m} g(x) \, dx| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Nachdem wir eventuell m und n vertauschen, ist $r_n \geq r_m$ und somit

$$\varepsilon > \left| \int_a^{r_n} g(x) \, dx - \int_a^{r_m} g(x) \, dx \right| = \left| \int_{r_m}^{r_n} g(x) \, dx \right| = \int_{r_m}^{r_n} g(x) \, dx.$$

Für n, m wie zuvor ist folglich

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= \left| \int_a^{r_n} f(x)\,dx - \int_a^{r_m} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{r_m}^{r_n} f(x)\,dx \right| \\ &\leq \int_{r_m}^{r_n} |f(x)|\,dx \leq \int_{r_m}^{r_n} g(x)\,dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen ein $y \in \mathbb{R}$. Der Grenzwert y ist unabhängig von der gewählten Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist nämlich auch $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b[$ mit $s_n \to b$, so konvergiert nach dem Vorigen $z_n := \int_a^{s_n} f(x)\,dx$ für $n \to \infty$ gegen ein $z \in \mathbb{R}$. Dann ist $r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b[$ mit $t_n \to b$ und somit $w_n := \int_a^{t_n} f(x)\,dx$ für $n \to \infty$ konvergent gegen ein $w \in \mathbb{R}$. Dann sind $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (denn diese Folge ist ja $y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots$). Die Teilfolgen konvergieren nun ebenfalls gegen w und somit ist $y = w = z$. Also ist $y = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Beispiel 2.6 Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert, denn die Funktion $[1, \infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und somit über jedes Intervall der Form $[1, r]$ Riemann-integrierbar. Weiter ist

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} =: g(x)$$

und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$ nach Satz 2.4(a). Das Majorantenkriterum ist also anwendbar.

Definition 2.7 Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist für alle $r \in [a, b[$. Ist $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$, so sagen wir, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiere *absolut*.

In diesem Fall konvergiert insbesondere das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, denn wir können das Majorantenkriterium anwenden mit $g(x) := |f(x)|$.

Das folgende Beispiel ist ein Analogon der aus der Analysis 1 bekannten Tatsache, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert, jedoch nicht absolut.

Beispiel 2.8 *Das uneigentliche Integral* $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ *konvergiert, jedoch nicht absolut.*

Zum Beweis stellen wir zunächst fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx}_{=:a_k},$$

wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist und wegen

$$0 \le a_k \le \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k-1)\pi} |\sin(x)|\,dx \le \frac{\pi}{k\pi} = \frac{1}{k}$$

eine Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe; der Grenzwert

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

existiert. Nach Lemma C.18 ist dann auch die Folge

$$\int_\pi^{m_n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

für $n \to \infty$ konvergent mit gleichem Limes, für jede Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $m_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[\pi, \infty[$ mit $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so ist Voriges anwendbar mit der Gaußklammer

$$m_n := [r_n/\pi],$$

so dass also $r_n/\pi - m_n \in [0, 1[$ und somit

$$r_n - \pi m_n \in [0, \pi[.$$

Da

$$\int_\pi^{r_n} \frac{\sin(x)}{x}\,dx - \int_\pi^{\pi m_n} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_{\pi m_n}^{r_n} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

mit

$$\left| \int_{\pi m_n}^{r_n} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \right| \le \frac{1}{m_n}(r_n - \pi m_n) \le \pi m_n \to 0,$$

konvergiert auch $\int_\pi^{r_n} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ gegen I.

Absolute Konvergenz: Sei $C := \int_0^\pi \sin(x)\,dx > 0$. Wegen $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \frac{C}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$ für $n \to \infty$ ist $\int_\pi^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \infty$. Das uneigentliche Integral $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert also nicht absolut.

Satz 2.9 (Integralvergleichskriterium) *Es sei $f\colon [1,\infty[\, \to [0,\infty[$ eine monoton fallende Funktion derart, dass für alle $r \in [1,\infty[$ die Einschränkung $f|_{[1,r]}$ Riemann-integrierbar ist.*[9] *Dann ist $\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.*

Beweis. Für all $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ für alle $x \in [n, n+1]$. Integrieren über $[n, n+1]$ liefert

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1).$$

Folglich ist

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^N f(n+1),$$

also

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \tag{27}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Ist $\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty$, so folgt aus (27), dass

$$\int_1^N f(x)\,dx \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \sup\left\{\int_1^N f(x)\,dx \colon N \in \mathbb{N}\right\} \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty.$$

Ist $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$, so folgt aus (27), dass $\sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(x)\,dx \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$ für alle $N \in \mathbb{N}$, also $\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sup\{\sum_{n=1}^N f(n) \colon N \in \mathbb{N}\}$ $\leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$. □

Mit dem Integralvergleichskriterium lassen sich die folgenden zwei Beispiele auf Satz 2.4 zurückführen (siehe Übung). Das erste Beispiel kennen wir bereits aus der Analysis 1 (zumindest für $\alpha \in \mathbb{Q}$); damals haben wir (dem

[9] Letztere Bedingung ist in Wirklichkeit automatisch erfüllt: Man kann zeigen, dass jede monotone Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Siehe z.B. Prof. Glöckners Analysis 2-Skript vom SoSe 2019.

Analysis 1-Skript von K.-H. Neeb folgend) statt dessen das Cauchysche Verdichtungskriterium zum Beweis benutzt.

Beispiel 2.10 *Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$.*

Bevor wir ein zweites Beispiel für das Integralvergleichskriterium geben, halten wir eine simple Tatsache fest:

Lemma 2.11 *Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $f \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass $f|_{[a,r]}$ Riemann-integrierbar ist für alle $r \in [a, b[$. Sei $c \in [a, b[$. Dann gilt: Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergiert. In diesem Fall ist $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.*

Beweis. Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[c, b[$ mit $r_n \to b$, so konvergiert $\int_c^{r_n} f(x)\,dx = \int_a^{r_n} f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$ gegen $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$ für $n \to \infty$, falls $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert. Also konvergiert $\int_c^b f(x)\,dx$ mit Grenzwert $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$.

Konvergiert $\int_c^b f(x)\,dx$ und ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b[$ mit $r_n \to b$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $r_n \geq c$ für alle $n \geq N$. Dann konvergiert $\int_a^{r_n} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{r_n} f(x)\,dx$ gegen $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Also konvergiert $\int_a^b f(x)\,dx$ mit dem Grenzwert $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. $\square$

Beispiel 2.12 *Gegeben $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$.*

Analog zu den bisher behandelten uneigentlichen Integralen für $f \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ lassen sich andere Integrationsintervalle behandeln.

Definition 2.13 (a) Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit $a < b$ und $f \colon\,]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für alle $r \in]a, b]$ die Einschränkung $f|_{[r,b]}$ Riemann-integrierbar ist. Wir definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r \searrow a} \int_r^b f(x)\,dx$$

wenn der Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$ und $f\colon\ ]a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass für alle $r < R$ in $]a, b[$ die Einschränkung $f|_{[r,R]}$ Riemann-integrierbar ist. Wir wählen $c \in]a, b[$ und definieren

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{r \searrow a} \int_r^c f(x)\,dx + \lim_{r \nearrow b} \int_c^r f(x)\,dx,$$

wenn beide Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren.

In (b) ist die Existenz der Grenzwerte und die Summe $\int_a^b f(x)\,dx$ der zwei Summanden unabhängig von der Wahl von c (vgl. Lemma 2.11 und sein Analogon für Funktionen auf $]a, b]$).

Satz 2.14 *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ genau dann, wenn $\alpha > -1$.*

Beweis. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]0, 1]$ mit $r_n \to 0$. Dann gilt $u_n := \frac{1}{r_n} \to \infty$. Wir substituieren $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2}\,dx$ und erhalten

$$\int_{r_n}^1 x^\alpha\,dx = \int_1^{u_n} \frac{1}{u^{\alpha+2}}\,du.$$

Nach Satz 2.4(a) konvergiert die rechte Seite für $n \to \infty$ genau dann, wenn $\alpha + 2 > 1$, also $\alpha > -1$; in diesem Fall ist der Grenzwert $\int_1^\infty \frac{1}{u^{\alpha+2}}\,du$ unabhängig von der Wahl von $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schließen, dass $\int_0^1 x^\alpha\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{u^{\alpha+2}}\,du$. $\square$

3 Integration rationaler Funktionen via Partialbruchzerlegung

In diesem Kapitel erklären wir, wie sich Integrale von rationalen Funktionen berechnen lassen, also von Funktionen der Form

$$f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \tag{28}$$

mit Polynomen (Polynomfunktionen) $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $q \neq 0$. Eine Polynomdivision erlaubt uns, $p = p_1 q + p_2$ zu schreiben mit einem Polynom p_2 vom Grad $\deg(p_2) < \deg(q)$ und einem Polynom p_1. Also ist

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}.$$

Eine Stammfunktion für p_1 können wir sofort hinschreiben und brauchen nur noch eine solche für p_2/q. Im folgenden betrachten wir daher nur noch rationale Funktionen f (wie in (28)) derart, dass $\deg(p) < \deg(q)$. Um das weitere Vorgehen zu motivieren, studieren wir ein Beispiel.

Beispiel 3.1 Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Da diese Pole an den Stellen $x = 1$ und $x = 3$ besitzt, ist es naheliegend, zu versuchen, sie als Linearkombinaton der Funktionen $1/(x-1)$ und $1/(x-3)$ zu schreiben:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \ \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}.$$

Multiplizieren mit $(x-1)(x-3) \neq 0$ zeigt, dass diese Gleichung zu

$$1 = A(x-3) + B(x-1) = (A+B)x + (-3A - B) \ \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

äquivalent ist und somit (siehe Lemma A.1(c)) zu

$$1 = A(x-3) + B(x-1) = (A+B)x + (-3A - B) \ \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$A + B = 0 \text{ und } -3A - B = 1$$

(Koeffizientenvergleich!), also wenn $B = -A$ und $-3A + A = 1$, also wenn $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$. Folglich ist

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-3}; \tag{29}$$

auf jedem der Intervalle $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ bzw. $]3, \infty[$ hat die gegebene rationale Funktion also eine Stammfunktion der Form

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C.$$

Wir zeigen, dass zu (29) analoge “Partialbruchzerlegungen” für jede rationale Funktion möglich sind. Eine Komplikation entsteht allerdings dadurch, dass das Nennerpolynom q nicht immer über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, sondern nicht-reelle komplexe Nullstellen besitzen kann. Im Anhang A finden Sie Sachverhalte über reelle und komplexe Polynome zusammengestellt, die wir nun benutzen (und die aus der Linearen Algebra bekannt sein sollten).

3.2 Wir betrachten ein normiertes Polynom[10]

$$q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Hat q eine komplexe, nicht reelle Nullstelle λ in dem Sinne, dass

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \text{ in } \mathbb{C},$$

so ist auch die komplex konjugierte Zahl $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von q; zudem stimmt die Vielfachheit m der Nullstelle λ mit derjenigen von $\overline{\lambda}$ überein (siehe Lemma A.1(k)). Das Produkt der entsprechenden Linearfaktoren ist

$$(x-\lambda)^m (x-\overline{\lambda})^m = (p_\lambda(x))^m$$

mit

$$p_\lambda(x) := (x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) = x^2 - (\lambda + \overline{\lambda})x + \lambda\overline{\lambda} = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2.$$

[10]Der Leitkoeffizient ist also 1.

Dies ist ein normiertes reelles Polynom zweiten Grades ohne reelle Nullstellen. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von q mit den Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$ und $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell}$ die paarweise verschiedenen komplexen, nicht reellen Nullstellen von q; seien $m_1, \ldots, m_\ell$ die Vielfachheiten von $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Dann ist

$$q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (x - \lambda_j)^{m_j} (x - \overline{\lambda_j})^{m_j}$$

und somit

$$q(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell} (p_{\lambda_j}(x))^{m_j}. \tag{30}$$

Das folgende Resultat über Partialbrüche wird in Anhang B bewiesen. Wir benutzen es in der Vorlesung als black box.

Satz 3.3 (Partialbruchzerlegung im Reellen) *Seien $p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen mit $\deg(q) \geq 1$ und $\deg(p) < \deg(q)$. Mit Notationen wie in (30) existieren dann reelle Zahlen $A_{j,\nu}$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $\nu \in \{1, \ldots, n_j\}$ sowie reelle Zahlen $B_{j,\nu}$ und $C_{j,\nu}$ für $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $\nu \in \{1, \ldots, m_j\}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(x - \alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{B_{j,\nu} + C_{j,\nu} x}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu}. \tag{31}$$

Beispiel 3.4 Wir suchen die Partialbruchzerlegung für die durch

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2(x-2)}$$

gegebene rationale Funktion. Das Nennerpolynom $q(x) = (x-4)^2(x-2)$ hat zwei Nullstellen, die beide reell sind, nämlich die Nullstelle $\alpha_1 = 4$ mit Vielfachheit $n_1 = 2$ und die Nullstelle $\alpha_2 = 2$ mit Vielfachheit $n_2 = 1$. Es ist also $k = 2$ und $\ell = 0$. Nach Satz 3.3 gibt es reelle Zahlen $A := A_{1,1}$, $B := A_{1,2}$ und $C := A_{2,1}$ derart, dass

$$\frac{1}{(x-4)^2(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x-2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. Äquivalent hierzu ist (nach Multiplizieren beider Seiten mit $q(x)$)

$$1 = A(x-4)(x-2) + B(x-2) + C(x-4)^2 \tag{32}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$ (und somit für alle $x \in \mathbb{R}$, siehe Lemma A.1(c)). Einsetzen von $x = 2$ in (32) liefert die Bedingung $1 = 4C$, somit

$$C = \frac{1}{4}.$$

Einsetzen von $x = 4$ in (32) liefert die Bedingung $1 = 2B$, also

$$B = \frac{1}{2}.$$

Wir setzen diese Werte von B und C in (32) ein und erhalten die Bedingung

$$1 = A(x-4)(x-2) + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-4)^2 = Ax^2 + \frac{1}{4}x^2 + \text{ein Polynom vom Grad} < 2.$$

Koeffizientengleich rechts und links vor dem Monom x^2 liefert die Bedingung $0 = A + \frac{1}{4}$, so dass also

$$A = -\frac{1}{4}$$

(stattdessen könnten Sie natürlich auch in (32) einen Koeffizientenvergleich vor x^2, x^1 und x^0 durchführen und ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für A, B, C erhalten und nach diesen auflösen). Also ist

$$f(x) := \frac{1}{(x-4)^2(x-2)} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{x-4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-4)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-2}$$

mit Stammfunktionen der Form

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\,\ln|x-4| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-4} + \frac{1}{4}\,\ln|x-2| + \text{Konst.}$$

auf jedem der Teilintervalle $]-\infty, 2[$, $]2, 4[$ bzw. $]4, \infty[$.

Beispiel 3.5 Wir suchen die Partialbruchzerlegung für die durch

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

gegebene rationale Funktion. Das Nennerpolynom $q(x) = x(x^2 + 1)$ hat drei Nullstellen, nämlich die einfache reelle Nullstelle $\alpha_1 = 0$ und die einfachen komplexen, nicht reellen Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\overline{\lambda_1} = -i$, die zueinander komplex konjugiert sind. Also ist $k = 1$, $n_1 = 1$, $\ell = 1$ und $m_1 = 1$. Nach Satz 3.3 gibt es reelle Zahlen $A := A_{1,1}$, $B := B_{1,1}$ und $C := C_{1,1}$ derart, dass

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B + Cx}{x^2 + 1}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Äquivalent hierzu ist (nach Multiplizieren beider Seiten mit $q(x)$)

$$1 = A(x^2 + 1) + (B + Cx)x \tag{33}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (und somit für alle $x \in \mathbb{C}$, siehe Lemma A.1(c)). Einsetzen von $x = 0$ in (33) liefert $A = 1$. Einsetzen von $x = i$ liefert die Bedingung

$$1 = (B + Ci)i = Bi - C;$$

Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile beider Seiten liefert $C = -1$ und $B = 0$. Folglich ist

$$f(x) := \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

mit Stammfunktionen der Form

$$\int f(x)\, dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \text{Konst.}$$

auf jedem der Teilintervalle $]-\infty, 0[$ bzw. $]0, \infty[$.

Für die einzelnen Summanden in der reellen Partialbruchzerlegung lässt sich stets eine Stammfunktion angeben.

Satz 3.6 (a) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist*

$$\int \frac{1}{x - \alpha}\, dx = \ln|x - \alpha| + \text{Konst.}$$

auf $]-\infty, \alpha[$ *bzw.* $]\alpha, \infty[$.

(b) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und natürliche Zahlen $n \geq 2$ ist*

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + \text{Konst.}$$

auf $]-\infty, \alpha[$ *bzw.* $]\alpha, \infty[$.

(c) *Für alle reellen Zahlen a, b, B, C mit $b \neq 0$ ist*

$$\int \frac{B+Cx}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{C}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{B+aC}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + \text{Konst.} \quad (34)$$

auf $\mathbb{R}$.

Beweis. (a) und (b) verifiziert man direkt durch Ableiten.

(c) Ersetzen von Cx durch $C(x-a)+Ca$ im Zähler von $\frac{B+Cx}{(x-a)^2+b^2}$ liefert

$$\begin{aligned}\frac{B+Cx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{C(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{B+aC}{(x-a)^2+b^2} \\ &= \frac{C}{2}\,\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{B+aC}{b}\,\frac{1/b}{(\frac{x-a}{b})^2+1}.\end{aligned}$$

Um den ersten Summanden zu integrieren, substituieren wir $u = (x-a)^2+b^2$, $du = 2(x-a)\,dx$; um den zweiten zu integrieren, substituieren wir $v = \frac{x-a}{b}$, $dv = \frac{1}{b}\,dx$. Dies liefert die in (34) angegebene Stammfunktion. □

Bemerkung 3.7 Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf einem Übungsblatt rechnen wir nach:

(a) Eine Stammfunktion für $\frac{B+Cx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}$ lässt sich hinschreiben, sobald wir eine für $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}$ kennen.

(b) Für die Stammfunktion von $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}$ gibt es eine Rekursionsformel, welche diese auf die Stammfunktion von $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^n}$ zurückführt.

4 Taylorentwicklung von C^k-Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir zunächst, wie gut eine differenzierbare Funktion durch ihre Tangente um eine Stelle x_0 approximiert wird. Die Tangente ist der Graph einer affin-linearen Funktion (also eines Polynoms vom Grad ≤ 1). Anschließend wiederholen wir den Begriff einer C^k-Funktion und untersuchen für solche die Approximation nahe x_0 durch Polynome höheren Grades.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall. Einer an einer Stelle $x_0 \in I$ differenzierbaren Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ haben wir ihre Tangente zugeordnet, also die Gerade mit der Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Wir gut wird die Funktion f nahe x_0 durch ihre Tangente approximiert? Die Differenz der beiden ist

$$R_1(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Wir zeigen nun, dass $R_1(x) \to 0$ für $x \to x_0$ und sogar

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Letztere Eigenschaft legt die Tangente zudem eindeutig fest:

Satz 4.1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn für ein $a \in \mathbb{R}$ der Fehler*

$$R(x) := f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

der linearen Approximation $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0) + R(x)$ die Bedingung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0 \tag{35}$$

erfüllt. In diesem Fall gilt $a = f'(x_0)$.

Beweis. Gilt (35), so folgt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \frac{R(x)}{x - x_0} \to a$$

für $x \to x_0$, d.h. f ist an der Stelle x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = a$. Ist umgekehrt f an der Stelle x_0 differenzierbar und setzen wir $a := f'(x)$, so gilt

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

für $x \to x_0$. □

Definition 4.2 Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und I ein nicht-entartetes Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ wird *k mal stetig differenzierbar* (oder kurz: Eine *C^k-Funktion*) genannt, wenn es stetige Funktionen $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}\colon I \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f^{(0)} = f$$

und für jedes $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ die Funktion $f^{(j)}$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$(f^{(j)})' = f^{(j+1)}.$$

Wir nennen f eine *C^∞-Funktion* (oder auch: eine *glatte* Funktion), wenn f eine C^k-Funktion ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Einmal stetig differenzierbare Funktionen werden *stetig differenzierbar* genannt.

Bemerkung 4.3 Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sieht man sofort:

(a) Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann C^{k+1}, wenn f eine C^k-Funktion ist und $f^{(k)}$ stetig differenzierbar; man nimmt dann $f^{(k+1)} := (f^{(k)})'$.

(b) Ebenso ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann C^{k+1}, wenn f stetig differenzierbar ist und f' eine C^k-Funktion; man nimmt dann $f^{(0)} := f$, $f^{(j)} := (f')^{(j-1)}$ für $j \in \{1, \ldots, k+1\}$.

Bemerkung 4.4 Sind $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ beides C^k-Funktionen, so gilt:

(a) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $\lambda f + \mu g$ eine C^k-Funktion mit

$$(\lambda f + \mu g)^{(j)} = \lambda\, f^{(j)} + \mu\, g^{(j)}$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq k$. Es genügt, dies für $k \in \mathbb{N}_0$ zu beweisen, was eine einfache Induktion ist.

(b) Das Produkt $fg\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ ist eine C^k-Funktion und es gilt die “Leibnizregel”

$$(fg)^{(j)}(x) = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} f^{(m)}(x)\, g^{(j-m)}(x)$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq k$ und alle $x \in I$. Wieder ist dies für $k \in \mathbb{N}_0$ eine einfache Induktion; man benutzt Bemerkung 4.3 (a) für den Induktionsschritt.

Lemma 4.5 (*Kettenregel*). *Es seien I und J nicht-entartete Intervalle, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ beides C^k-Funktionen. Gilt $g(I) \subseteq J$, so ist*

$$f \circ g\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(g(x))$$

eine C^k-Funktion.

Beweis. Wir dürfen $k \in \mathbb{N}_0$ annehmen. Ist $k = 0$, so ist $f \circ g$ stetig, also C^0. Sei nun $k \geq 1$ und gelte die Aussage schon für $k-1$ statt k. Da $k \geq 1$, sind f und g differenzierbar und nach der Kettenregel ist

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'. \tag{36}$$

Diese Funktion ist stetig, folglich $f \circ g$ eine C^1-Funktion. Da f' eine C^{k-1}-Funktion ist und g als C^k-Funktion insbesondere eine C^{k-1}-Funktion, ist $f' \circ g$ per Induktionsvoraussetzung eine C^{k-1}-Funktion. Da g' eine C^{k-1}-Funktion ist, ist nach Bemerkung 4.4 (b) das Produkt $(f \circ g)'$ in (36) eine C^{k-1}-Funktion. Da $f \circ g$ eine C^1-Funktion ist und $(f \circ g)'$ eine C^{k-1}-Funktion, ist $f \circ g$ nach Bemerkung 4.3 (b) eine C^k-Funktion. □

Im vorigen Beweis mussten wir $(f \circ g)^{(j)}$ nur für $j = 1$ kennen, ausgedrückt durch Ableitungen von f und g (dann ist dies die gewöhnliche Kettenregel). Wir bemerken, dass es auch für höhere j explizite Formeln gibt (die auf Faà di Bruno zurückgehen). Man versucht meist, diese zu vermeiden.

Wir kennen die Ableitungen und höheren Ableitungen von Polynomen.

Lemma 4.6 *Wie betrachten ein Polynom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$, von der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$*

$$p^{(k)}(x_0) = \begin{cases} k!\, a_k & \text{wenn } k \in \{0, \ldots, n\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für $(x-x_0)^j$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ berechnen wir per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d^k}{dx^k}((x-x_0)^j) = \begin{cases} j(j-1)\cdots(j-k+1)(x-x_0)^{j-k} & \text{wenn } k \in \{0,\ldots,j\}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir $x = x_0$ ein, so folgt

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big|_{x=x_0}((x-x_0)^j) = \begin{cases} k! & \text{wenn } j = k; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)^j = k!\,\delta_{j,k}$$

mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } j = k; \\ 0 & \text{wenn } j \neq k. \end{cases}$$

Es folgt $p^{(k)}(x_0) = \sum_{j=0}^n a_j\, k!\,\delta_{j,k}$ und somit die behauptete Formel. □

Definition 4.7 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion. Gegeben $x_0 \in I$ definieren wir ein Polynom $T^n_{x_0} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ via

$$T^n_{x_0} f(x) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Wir nennen $T^n_{x_0} f$ das *Taylorpolynom von f an der Stelle x_0 von der Ordnung n.*

Bemerkung 4.8 Nach Lemma 4.6 ist das Taylorpolynom $T^n_{x_0} f$ das eindeutig festgelegte Polynom p vom Grad $\leq n$ mit den Ableitungen

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{für alle } k \in \{0,\ldots,n\}.$$

Beispiel 4.9 Es ist $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, $\sin''(0) = -\sin(0) = 0$ und $\sin'''(0) = -\cos(0) = -1$. Die Taylorpolynome der Ordnungen $n \in \{0,1,2,3\}$ der Sinusfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ sind also

$$T^0_0(\sin)(x) = 0, \qquad T^1_0(\sin)(x) = T^2_0(\sin)(x) = x, \qquad T^3_0(\sin)(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Da $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$, $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$ und $\cos'''(0) = \sin(0) = 0$, lauten die Taylorpolynome der Ordnungen $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ der Cosinusfunktion an der Stelle $x_0 = 0$

$$T_0^0(\cos)(x) = T_0^1(\cos)(x) = 1, \qquad T_0^2(\cos)(x) = T_0^3(\cos)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Da $\exp' = \exp$ und somit $\exp^{(k)} = \exp$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, ist $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ und folglich

$$T_0^0(\exp)(x) = 1, \quad T_0^1(\exp)(x) = 1 + x, \quad T_0^2(\exp)(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

und $T_0^3(\exp)(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$. Analog ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$T_0^n(\exp)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

genau die Anfangssumme der Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$.

Wir fragen uns nun, wie gut $f(x)$ durch $T_{x_0}^n f(x)$ approximiert wird, untersuchen also das Restglied $R_n(x)$ der Taylorapproximation

$$f(x) = T_{x_0}^n f(x) + R_n(x).$$

Satz 4.10 (Satz von Taylor) *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in I$ sei*

$$R_n(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

so dass also $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$.

(a) *Es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ist f sogar C^{n+1}, so lässt sich das Restglied $R_n(x)$ auch wie folgt schreiben:

(b) *(Restglied in Integralform). Es ist $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.*

(c) (*Restglied von Lagrange*). *Es ist* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *für eine reelle Zahl* ξ *zwischen* x_0 *und* x.

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $n = 0$ ist

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) \tag{37}$$

für $x \in I$. Da f stetig ist, gilt

$$\frac{R_0(x)}{(x-x_0)^0} = R_0 f(x) = f(x) - f(x_0) \to f(x_0) - f(x_0) = 0$$

für $x \to x_0$, was (a) verifiziert. Ist f sogar C^1, so gilt nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \tag{38}$$

und somit (b). Indem wir den Mittelwertsatz der Integralrechung (Satz 1.28) auf das mittlere Integral in (38) anwenden, erhalten wir weiter

$$R_0(x) = f'(\xi)(x-x_0) = \frac{f'(\xi)}{1!}(x-x_0)$$

für ein ξ zwischen x und x_0 und somit (c).

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussagen des Satzes gelten bereits für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sei f eine C^{n+1}-Funktion. Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &\quad + \underbrace{R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=R_{n+1}(x)} \end{aligned}$$

ist dann

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{39}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x, nach (c). Es folgt

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \to 0$$

für $x \to x_0$, unter Benutzung der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$. Also gilt (a) für $n+1$ statt n. Sei nun f sogar eine C^{n+2}-Funktion. Nach (c) gilt

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Eine partielle Integration mit $u'(t) = (x-t)^n/n!$, $u(t) = -(x-t)^{n+1}/(n+1)!$, $v(t) = f^{(n+1)}(t)$, $v'(t) = f^{(n+2)}(t)$ liefert

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \Big[-f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}/(n+1)!\Big]_{t=x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = T_{x_0}^n f(x) + R_n(x) = T_{x_0}^{n+1} f(x) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt. \quad (40)$$

Das Integral rechts in (40) ist dann $R_{n+1}(x)$ und somit ist (b) für $n+1$ statt n gezeigt. Da $(x-t)^{n+1} \geq 0$ für alle t zwischen x_0 und x oder $(x-t)^{n+1} \leq 0$ für alle solchen t, gibt es nach dem Verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 1.29) ein ξ zwischen x_0 und x derart, dass

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+2)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}\,dt = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}, \end{aligned}$$

wobei $\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}\,dt = \Big[-(x-t)^{n+2}/(n+2)\Big]_{t=x_0}^{x} = (x-x_0)^{n+2}/(n+2)$ benutzt wurde. Also gilt auch (c) mit $n+1$ statt n. $\square$

Bemerkung 4.11 (a) Im Falle einer C^n-Funktion mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x (vgl. (37) und (39)). Diese Darstellung des Restglieds heißt *Peano-Restglied.*

(b) Im Falle einer C^n-Funktion mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist auch folgende Integralform des Restglieds möglich:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))\, dt.$$

Wegen $\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\, dt = (x-x_0)^n/n!$ ist nämlich

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\, dt \\ &= \underbrace{f^{(n)}(x_0)\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\, dt}_{=f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n/n!} + \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))\, dt}_{=R_n(x)}. \end{aligned}$$

(c) Wir werden später auch vektorwertige C^n-Funktionen (etwa $f\colon I \to \mathbb{R}^m$) kennenlernen. Die Integralform des Restglieds aus (b) bleibt hier gültig (und ebenso die Integralform aus Satz 4.10(b), wenn f sogar C^{n+1} ist). Hingegen lassen sich Restglieder vektorwertiger Funktionen nicht mittels Zwischenstellen ξ berechnen.

Beispiel 4.12 Berechnen Sie $\sin(1)$ näherungsweise mit einem Fehler, der $< \frac{1}{10}$ ist. Lösung: Wir benutzen die Taylorentwicklung 3. Ordnung der Sinusfunktion um die Stelle $x_0 = 0$. Wir benutzen das Lagrange-Restglied: Da der Sinus eine C^4-Funktion ist, gibt es ein $\xi \in [0,1]$ derart, dass

$$R_4(1) = \frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!}(1-0)^4 = \frac{-\sin(\xi)}{24}.$$

Da $\sin(\xi) \in [-1,1]$, folgt

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{24}.$$

Unter Benutzung des Taylorpolynoms $T_0^3(\sin)$ aus Beispiel 4.9 folgt

$$\sin(1) = 1 - \frac{1^3}{6} + R_4(1) = \frac{5}{6} + R_4(1).$$

Also ist $\sin(1)$ etwa $5/6$ mit einem Fehler vom Betrag $\leq 1/24 < 1/10$. Da $5/6 = 0,8\overline{3} = 0,8 + \frac{1}{30}$, ist $\sin(1)$ auch etwa $0,8$ mit einem Fehler $\leq \frac{1}{24} + \frac{1}{30} < \frac{1}{10}$.

5 Differenzierbarkeit von Potenzreihen

In der Analysis 1 haben wir bereits gezeigt, dass die reelle Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ sowie die Sinusfunktion und Cosinusfunktion beliebig oft differenzierbar sind. Allgemeiner gilt:

Satz 5.1 *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, wobei $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Funktion*

$$f\colon\ ]-R, R[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

stetig differenzierbar. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k$ hat ebenfalls Konvergenzradius R und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k \quad \textit{für alle } x \in\ ]-R, R[,$$

Bemerkung 5.2 Mit $n := k+1$ gilt nach dem Vorigen

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \tag{41}$$

für alle $x \in\ ]-R, R[$, also

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

Die Potenzreihe kann also gliedweise abgeleitet werden.

Da f' ebenfalls durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R gegeben ist, sieht man unmittelbar per Induktion, dass f für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine C^m-Funktion ist und somit eine C^∞-Funktion:

Folgerung 5.3 *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, wobei $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$f\colon\ ]-R, R[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

eine C^∞-Funktion. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m)\, a_n\, x^{n-m}$$

für die mte Ableitung an der Stelle $x \in \,]-R, R[$. $\square$

Beweis von Satz 5.1. Wir behaupten, dass auch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\, a_{k+1}\, x^k$ den Konvergenzradius R besitzt. Wenn das stimmt, so ist sie für jedes $r \in \,]0, R[$ auf $[-r, r]$ also gleichmäßig konvergent, mit stetiger Grenzfunktion $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ (siehe Analysis 1). Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (bzw. Bemerkung 1.35) ist die Funktion

$$h\colon [-r, r] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(0) + \int_0^x g(t)\, dt = f(0) + \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\, a_{k+1}\, t^k\, dt$$

eine Stammfunktion für g, also differenzierbar mit $h' = g$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe im Integranden auf $[-r, r]$ können wir nach Satz 1.19 Grenzwert und Integral vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(0) + \int_0^x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}\, t^k\, dt \\
&= f(0) + \lim_{n\to\infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}\, t^k\, dt \\
&= f(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} \underbrace{\int_0^x (k+1)\, t^k\, dt}_{=[t^{k+1}]_0^x} \\
&= f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x).
\end{aligned}$$

Es ist also $f|_{[-r,r]} = h$ differenzierbar, also f an jeder Stelle $x \in \,]-r, r[$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = h'(x) = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}\, x^k$.

Beweis der Behauptung: Wir beobachten zunächst, dass auch die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n \tag{42}$$

(mit 0 statt a_0) Konvergenzradius R hat und somit auch die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k. \tag{43}$$

[Diese konvergiert nämlich genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{n-1} \tag{44}$$

konvergiert (da lediglich $n = k+1$, $k = n-1$ substituiert wird). Konvergiert (42) für eine reelle Zahl $x \neq 0$, so auch die Reihe, die durch Multiplikation mit $1/x$ entsteht, also (44). Konvergiert umgekehrt (44) für ein $x \in \mathbb{R}$, so liefert Multiplikation mit x eine konvergente Reihe und diese ist gleich (42).]

Der Konvergenzradius S der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k \tag{45}$$

ist ebenfalls gleich R. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < S$ ist sie nämlich absolut konvergent, nach dem Majorantenkriterium also auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\, x^k$ absolut konvergent. Ist $0 \neq x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$, so wählen wir ein $s \in \mathbb{R}$ mit $|x| < s < R$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\, s^k$ ist dann absolut konvegent. Weiter gilt

$$q := \frac{|x|}{s} < 1$$

und wir wissen aus der Analysis 1, dass

$$k\, q^k = \frac{k}{(1/q)^k} \to 0$$

für $k \to \infty$, also auch

$$(k+1)\, q^{k+1} \to 0.$$

Die Folge ist daher beschränkt: Es gibt ein $C \geq 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$(k+1)\, q^{k+1} \leq C.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nun

$$(k+1)\, |a_{k+1}|\, |x|^k = |a_{k+1}|\, s^k\, (k+1)\, q^k = |a_{k+1}|\, s^k\, \frac{1}{q}(k+1)\, q^{k+1} \leq \frac{C}{q}\, |a_{k+1}|\, s^k.$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1}|\, s^k$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}\, x^k$ und die letztere Reihe somit konvergent. $\square$

6 Taylorreihen

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $t_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, so ist es naheliegend, die Potenzreihe zu betrachten, deren Anfangssummen die Taylorpolynome $T^n_{x_0} f$ sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 6.1 In der vorigen Situation nennt man die Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

die *Taylorreihe* von f am Entwicklungspunkt x_0.

Die Taylorreihe ist leider oft weniger nützlich, als man hoffen würde. Unter anderem treten die folgenden Schwierigkeiten auf:

Bemerkung 6.2 (a) Taylorreihen können Konvergenzradius 0 haben (denn nach einem Satz von Borel tritt jede Potenzreihe auf als Taylorreihe einer geeigneten glatten Funktion; siehe Proseminar).

(b) Selbst wenn die Taylorreihe positiven Konvergenzradius hat, braucht $x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ auf keiner x_0-Umgebung mit f übereinzustimmen. Zum Beispiel werden wir gleich nachrechnen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

eine C^∞-Funktion ist mit $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ ist also die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{0}{j!} x^j$$

mit Konvergenzradius $R = +\infty$ und Grenzfunktion 0. Da $f(x) = e^{-1/x} > 0$ für alle $x > 0$, stimmt $f(x)$ auf keiner 0-Umgebung mit $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = 0$ überein.

Bemerkung 6.3 Hat eine Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, x^j$ Konvergenzradius $R > 0$, so hat die durch $f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, x^j$ gegebene Grenzfunktion $f\colon\ ]-R, R[\to \mathbb{R}$ als Taylorreihe sich selbst an der Stelle $x_0 = 0$, es ist also

$$\frac{f^{(j)}(0)}{j!} = a_j$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Siehe Folgerung 5.3.

Lemma 6.4 *Es sei $f\colon\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $-\infty\leq a<b\leq\infty$ und $c\in]a,b[$ derart, dass die Einschränkungen $f|_{]a,c[}$ und $f|_{]c,b[}$ stetig differenzierbar sind. Weiter seien folgende Grenzwerte existent und gleich:*

$$\eta:=\lim_{x\nearrow c}f'(x)=\lim_{x\searrow c}f'(x).$$

Dann ist f stetig differenzierbar und $f'(c)=\eta$.

Beweis. Die Abbildung $\phi\colon\ ]a,b[\to\mathbb{R}$,

$$x\mapsto\begin{cases} f'(x) & \text{wenn } x\neq c;\\ \eta & \text{wenn } x=c\end{cases}$$

ist stetig. Es genügt zu zeigen, dass $g:=f|_{[c,b[}$ und $h:=f|_{]a,c]}$ stetig differenzierbar sind; dann ist f an der Stelle c rechtsseitig differenzierbar mit rechtsseitiger Ableitung $g'(c)=\lim_{x\searrow c}g'(x)=\lim_{x\searrow c}f'(x)=\eta$; analog ist f an der Stelle c linksseitig differenzierbar mit Ableitung $h'(c)=\eta$. Also ist f an der Stelle c differenzierbar mit Ableitung $f'(c)=\eta=\phi(c)$ und folglich $f'=\phi$, eine stetige Funktion. Wir wählen $\beta\in]c,b]$ und definieren

$$G\colon [c,b[\to\mathbb{R},\ \ x\mapsto f(\beta)+\int_\beta^x\phi(t)\,dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ist G stetig differenzierbar mit Ableitung $G'(x)=\phi(x)$ für alle $x\in[c,b[$. Also sind sowohl $G_{]c,b[}$ als auch $f|_{]c,b[}$ Stammfunktionen für $\phi|_{]c,b[}$. Da $f(\beta)=G(\beta)$, folgt

$$f|_{]c,b[}=G|_{]c,b[}.$$

Da f und G stetig sind, ist weiter

$$f(c)=\lim_{x\searrow c}f(x)=\lim_{x\searrow c}G(x)=G(c).$$

Also ist $f|_{[c,b[}=G$, eine C^1-Funktion. Analog sieht man, dass $f|_{]a,c]}$ eine C^1-Funktion ist. □

Das folgende Lemma wird uns helfen, die Diskussion des Beispiels aus Bemerkung 6.2 (b) zu beenden.

Lemma 6.5 *Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wie in Bemerkung* 6.2 (b).

(a) *Für jede Polynomfunktion* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist die folgende Funktion stetig:*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \begin{cases} p(1/x)f(x) & \textit{wenn } x > 0; \\ 0 & \textit{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

(b) f *is* C^∞ *mit* $f^{(j)}(0) = 0$ *für alle* $j \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (a) Sei $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ gilt dann

$$|p(1/x)f(x)| = \frac{|p(1/x)|}{e^{1/x}} \leq \frac{|p(1/x)|}{1/((n+1)!\, x^{n+1})} \leq (n+1)! \sum_{j=0}^n |a_j| x^{n+1-j} \to 0$$

für $x \to 0$. Also ist die zu untersuchende Funktion an der Stelle 0 stetig und somit stetig (da sie auf $]-\infty, 0[$ sowie $]0, \infty[$ offenbar stetig ist).

(b) Wir zeigen per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, dass f eine C^k-Funktion ist und es eine Polynomfunktion $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} p_k(1/x)f(x) & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases} \tag{46}$$

Induktionsanfang $k = 0$: Offenbar gilt (46) für $f^{(0)} = f$ mit der durch $p_0(x) := 1$ gegebenen konstanten Polynomfunktion. Nach (a) ist f also stetig, somit C^0.

Ist $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben und gilt (46), so ist $(f^{(k)})'(x) = 0$ für $x < 0$, da $f^{(k)}|_{]-\infty,0[} = 0$. Für $x > 0$ erhalten wir mit der Produktregel und der Kettenregel

$$(f^{(k)})'(x) = -\frac{1}{x^2}\, p_k'(1/x)\, e^{-1/x} + \frac{1}{x^2}\, p_k(1/x)\, e^{-1/x} = p_{k+1}(1/x)\, e^{-1/x}$$

mit $p_{k+1}(t) := -t^2\, p_k'(t) + t^2\, p_k(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Nach Teil (a) gilt also

$$\lim_{x \searrow 0} (f^{(k)})'(x) = 0 = \lim_{x \nearrow 0} (f^{(k)})'(x).$$

Somit ist $f^{(k)}$ nach Lemma 6.4 stetig differenzierbar (und folglich f eine C^{k+1}-Funktion), mit

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = \begin{cases} p_{k+1}(1/x)f(x) & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Dies beendet den induktiven Beweis. $\square$

Teil II: Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

7 Normierte Räume; Normen auf $\mathbb{R}^n$

Auf $\mathbb{R}$ haben wir den Betrag

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[, \quad x \mapsto |x|$$

zur Verfügung und definieren mit seiner Hilfe den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}$ als

$$d(x, y) := |x - y|.$$

Die so erhaltene Funktion

$$d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[, \quad d(x, y) := |x - y|$$

ist dann eine sogenannte Metrik und $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum (siehe Anhang C für diese und zugehörige Begriffe, die in Prof. Glöckners Analysis 1 bereits benutzt werden. An dieser Stelle erfolgt in der Analysis 2 eine kurze Wiederholung). Analog auf $\mathbb{C}$.

Entsprechend wollen wir nun auf $\mathbb{R}^n$ Metriken d betrachten, die nur von der Differenz $x - y$ zweier Punkte abhängen. Sie werden von der Form

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

sein mit einer sogenannten“Norm” $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ (die ähnliche Eigenschaften wie der Betrag hat).

Definition 7.1 Es sei E ein (reeller) Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|.\|\colon E \to [0, \infty[, \quad x \mapsto \|x\|$$

heißt *Norm*, wenn gilt:

Definitheit. Für alle $x \in E \setminus \{0\}$ ist $\|x\| > 0$.

Subadditivität. Für alle $x, y \in E$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Positive Homogenität. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in E$ ist $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$.

Für den Nullvektor $0 \in E$ gilt stets $\|0\| = 0$, denn aufgrund der positiven Homogenität ist $\|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \cdot \|0\| = 0 \cdot \|0\| = 0$ (wobei die linke Null stets $0 \in \mathbb{R}$ meint).

Ist E ein Vektorraum und $\|.\|$ eine Norm auf E, so nennt man das Paar $(E, \|.\|)$ einen *normierten Raum.*

Satz 7.2 *Ist* $(E, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist*

$$d\colon E \times E \to [0, \infty[, \quad d(x,y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf E*.*

Beweis. Für $x, y \in E$ ist $0 = d(x,y) = \|x-y\|$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also $x = y$.

Sind $x, y, z \in E$, so gilt

$$d(x,z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z)$$

unter Benutzung der Subadditivität. Also erfüllt d die Dreiecksungleichung.

Schließlich gilt $d(y,x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \cdot \|x - y\| = 1 \cdot d(x,y) = d(x,y)$, d.h. d ist symmetrisch. □

Definition 7.3 Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so versehen wir E stets mit der durch $d(x,y) := \|x - y\|$ gegebenen Metrik wie in Satz 7.2, wenn nichts anderes gesagt wird. Sprechen wir von offenen oder abgeschlossenen Kugeln, offenen oder abgeschlossenen Mengen, konvergenten Folgen oder Cauchyfolgen in $(E, \|\cdot\|)$, so meinen wir solche im metrischen Raum (E, d). Insbesondere ist

$$B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) := B_\varepsilon(x) := \{y \in E\colon \|y - x\| < \varepsilon\}$$

die offene Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um $x \in E$ und

$$\overline{B}_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) := \overline{B}_\varepsilon(x) := \{y \in E\colon \|y - x\| \leq \varepsilon\}$$

die entsprechende abgeschlossene Kugel. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E konvergiert gegen $x \in E$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \;\; \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E ist eine Cauchyfolge, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

(vgl. Anhang C für eine Wiederholung der vorigen Grundbegriffe).

Wenn in E jede Cauchyfolge konvergiert (also der metrische Raum (E, d) vollständig ist), so nennen wir den normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ einen *Banachraum.*

Beispiele 7.4 (a) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum, denn der Betrag $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ ist eine Norm und $\mathbb{R}$ ist bezüglich der durch $d(x, y) := |x-y|$ definierten Metrik vollständig (wie in der Analysis 1 gezeigt).

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *euklidische Norm* die Abbildung

$$\|\cdot\|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, \quad \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Die zugehörige Metrik

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, \quad d(x, y) := \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

heißt *euklidischer Abstand.* In Ebene und Raum ist also $\|x-y\|_2$ der übliche, aus der Schule bekannte Abstand der Vektoren x und y.

(c) Die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

heißt *Maximum-Norm.* Der zugehörige Abstand ist für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ gegeben durch

$$\|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Dies ist also das Maximum der Abstände der einzelnen Komponenten. Für Rechnungen ist dieser Abstand oft bequemer als der euklidische.

(d) Die Abbildung

$$\|.\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, \quad \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$$

heißt 1-*Norm.* Der zugehörige Abstand ist für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ gegeben durch

$$\|x - y\|_1 = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Satz 7.5 *Die euklidische Norm, die* 1*-Norm und die Maximum-Norm sind Normen auf* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Seien $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ aus $\mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$.

Maximum-Norm:

Definitheit. Es ist $0 = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ genau dann, wenn $|x_1| = \dots = |x_n| = 0$, also $x = 0$.

Subadditivität. Für jedes $k \in \{1, \dots, k\}$ ist

$$|x_k + y_k| \le |x_k| + |y_k| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Bilden des Maximums über alle k liefert

$$\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Positive Homogenität. Es ist $\|tx\|_\infty = \max\{|tx_1|, \dots, |tx_n|\} = \max\{|t| \cdot tx_1|, \dots, |t| \cdot |x_n|\} = |t| \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |t| \cdot \|x\|_\infty$.

Euklidische Norm:

Definitheit: Es ist $0 = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n = 0$, also $x = 0$.

Subadditivität: Als Hilfsmittel benutzen wir das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}.$$

Dieses erfüllt $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ und ist für festes x linear in y. Dann ist also

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Nach der (aus der Linearen Algebra bekannten) Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
(\|x + y\|_2)^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= (\|x\|_2)^2 + 2\langle x, y \rangle + (\|y\|_2)^2 \le (\|x\|_2)^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + (\|y\|_2)^2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.
\end{aligned}$$

Da die Quadratwurzel eine monoton wachsende Funktion ist, bleibt die vorige Ungleichung bestehen, wenn wir die Wurzel ziehen:

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Positive Homogenität: Es ist

$$\begin{aligned} \|tx\|_2 &= \sqrt{(tx_1)^2 + \cdots + (tx_n)^2} = \sqrt{t^2 x_1^2 + \cdots + t^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{t^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = \sqrt{t^2}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = |t| \cdot \|x\|_2. \end{aligned}$$

1-**Norm**: Es ist $0 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = 0$ genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$, also $(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist weiter

$$\|x+y\|_1 = \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j + y_j|}_{\leq |x_j| + |y_j|} \leq \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ ist weiter $\|tx\| = |tx_1| + \cdots + |tx_n| = |t| \cdot |x_1| + \cdots + |t| \cdot |x_n| = |t| \cdot (|x_1| + \cdots + |x_n|) = |t| \cdot \|x\|_1$. □

Wie sehen Kugeln aus für die gerade diskutierten Normen auf $\mathbb{R}^n$?

7.6 Kugeln bzgl. der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^n$ sind übliche Kugeln,

$$B_r^{\|\cdot\|_2}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} < r\}.$$

Für $n = 2$ ist insbesondere $B_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ die offene Einheitskreisscheibe.

Im Fall der Maximum-Norm ist $r > \|y - x\|_\infty = \max\{|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|\}$ genau dann, wenn $|y_k - x_k| < r$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$, also $y_k \in]x_k - r, x_k + r[$. Somit ist

$$B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_n - r, x_n + r[$$

ein Würfel im $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ ist insbesondere

$$B_1^{\|\cdot\|_\infty}(0) =]-1, 1[\times]-1, 1[$$

(ein Quadrat).

Im Falle der 1-Norm ist im Zweidimensionalen $B_r^{\|\cdot\|_1}(x)$ das Quadrat mit den

Eckpunkten $(x_1 - r, x_2)$, $(x_1, x_2 - r)$, $(x_1 + r, x_2)$, $(x_1, x_2 + r)$. Rechnen wir dies nach: Zur Vereinfachung stellen wir zunächst fest, dass

$$B_r^{\|\cdot\|_1}(x) = x + B_r^{\|\cdot\|_1}(0),$$

d.h. die Kugel um x entsteht durch Verschieben aus der Kugel um 0 (Begründung: Es ist $y = x + (y - x)$ und $y - x$ ist genau dann in $B_r^{\|\cdot\|_1}(0)$, wenn $\|y - x\|_1 < r$, also wenn $y \in B_r^{\|\cdot\|_1}(x)$. Ist nun $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, etwa im ersten Quadranten (also $x_1, x_2 \geq 0$), so ist $(x_1, x_2) \in B_r^{\|\cdot\|_1}(0)$ genau dann, wenn

$$r > |x_1| + |x_2| = x_1 + x_2,$$

d.h. (x_1, x_2) liegen im von der x-Achse, y-Achse und der Geraden $x_1 + x_2 = r$ eingeschlossenen Gebiet (ausschließlich der Geraden). Analog in den anderen Quadranten.

$B_1(0)$ nennt man übrigens auch die (offene) *Einheitskugel*. Die vorigen Beispiele von Kugeln sind konvex, d.h. mit je zwei Punkten enthalten sie auch deren Verbindungsstrecke. Dies ist ein allgemeines Phänomen.

Definition 7.7 Es sei E ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $M \subseteq E$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in M$ ihre Verbindungsstrecke

$$\{x + t(y - x) \colon t \in [0, 1]\}$$

in M liegt, d.h.

$$(\forall t \in [0, 1]) \quad (1 - t)x + ty \in M.$$

Satz 7.8 *Für jeden normierten Raum $(E, \|.\|)$, $x \in E$ und $r > 0$ sind die Kugeln $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ und $\overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$ konvexe Teilmengen von E.*

Beweis. Seien $y, z \in B_r^{\|\cdot\|}(x)$ und $t \in [0, 1]$. Ist $t = 0$ oder $t = 1$, so ist $(1 - t)y + tz \in \{y, z\}$, also in der Kugel. Nun sei $t \in]0, 1[$. Dann ist auch $1 - t > 0$ und folglich $(1 - t)\|y - x\| < (1 - t)r$ und $t\|z - x\| < tr$. Subadditivität und positive Homogenität liefern nun

$$\begin{aligned}
\|(1 - t)y + tz - x\| &= \|(1 - t)y + tz - (1 - t)x + tx\| \\
&\leq \|(1 - t)(y - x)\| + \|t(z - x)\| \\
&= |1 - t| \cdot \|y - x\| + |t| \cdot \|z - x\| \\
&= (1 - t)\|y - x\| + t\|z - x\| < (1 - t)r + tr = r.
\end{aligned}$$

Also ist $(1-t)y+tz \in B_r^{\|\cdot\|}(x)$.

Entsprechend erhalten wir für $y, z \in \overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$ und $t \in [0,1]$, dass $\|(1-t)y+tz-x\| \leq \|(1-t)(y-x)\|+\|t(z-x)\| = |1-t|\cdot\|y-x\|+|t|\cdot\|z-x\| = (1-t)\|y-x\|+t\|z-x\| \leq (1-t)r+tr = r$. Also $(1-t)y+tz \in \overline{B}_r^{\|\cdot\|}(x)$. □

7.9 (Normieren von Vektoren) Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so lässt sich jeder Vektor $y \in E \setminus \{0\}$ als Vielfaches eine Einheitsvektors (der Länge 1) schreiben. In der Tat ist

$$y = \|y\|u \quad \text{mit} \quad u := \frac{1}{\|y\|}y$$

und $\|u\| = \frac{1}{\|y\|}\|y\| = 1$ unter Benutzung der positiven Homogenität der Norm.

Wir erinnern an die Definition von Lipschitz-Stetigkeit (Definition C.25(b)).

Satz 7.10 *Für jeden normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist die Norm*

$$\|\cdot\|\colon E \to [0,\infty[\subseteq \mathbb{R}$$

Lipschitz-stetig und somit stetig.

Beweis. Für $x, y \in E$ ist $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$ wegen der Subadditivität und somit

$$\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|.$$

Vertauschen der Rollen von x und y liefert

$$-(\|x\|-\|y\|) = \|y\|-\|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|.$$

Also gilt

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\| \tag{47}$$

und somit $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq L\|x-y\|$ mit $L=1$. □

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Satz 7.11 *Versehen wir $\mathbb{R}^n$ mit der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$, so gilt:*

(a) *Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion*

$$\mathrm{pr}_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ und somit stetig.

(b) *Eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen ein $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$, wenn sie komponentenweise gegen y konvergiert, also*

$$x_{m,k} \to y_k \quad \text{für } m \to \infty,$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) *Eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Punken $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn $(x_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

(d) *$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

(e) *Ist (Z, d_Z) ein metrischer Raum und $z \in Z$, so ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \colon Z \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_n(y))$$

genau dann stetig nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ an der Stelle z, wenn all ihre Komponenten $f_1, \ldots, f_n \colon Z \to \mathbb{R}$ an der Stelle z stetig sind.

Beweis. Das ist ein Spezialfall des Satzes 7.29 (am Ende des Kapitels) über Produkte metrischer Räume, angewandt mit $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$. Es genügt daher, den allgemeineren Satz zu beweisen, was am Kapitelende erfolgt. In der Vorlesung im SoSe 2025 haben wir dennoch Satz 7.11 gleich jetzt bewiesen und Satz 7.29 ohne Beweis nur kurz erwähnt (mit Verweis auf das Skript). □

Beispiel 7.12 Die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, x\cos(y), \sin(xy))$$

ist stetig, denn ihre Komponenten f_1, f_2 und f_3 sind stetig: Mit den stetigen Projektionen $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ und $\mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$ sind

$$f_1 = \mathrm{pr}_1, \quad f_2 = \mathrm{pr}_1 \cdot (\cos \circ \, \mathrm{pr}_2), \quad f_3 = \sin \circ (\mathrm{pr}_1 \cdot \mathrm{pr}_2)$$

stetig (vgl. Satz C.15 und Satz C.16).

Während wir auf $\mathbb{R}$ immer die gleiche Norm benutzen (den Betrag $|\cdot|$), gibt es auf $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ viele verschiedene Normen. Für viele Zwecke ist es jedoch egal, welche Norm benutzt wird, wie wir nun ausführen.

Definition 7.13 Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum E wird *äquivalent* zu einer Norm $\|\cdot\|'$ auf E genannt, wenn es reelle Zahlen $a, b > 0$ gibt derart, dass

$$(\forall x \in E) \qquad a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'. \tag{48}$$

Lemma 7.14 *Sei E ein reeller Vektorraum. Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf E.*

Beweis. Jede Norm $\|\cdot\|$ auf E ist zu sich selbst äquivalent, da wir im Falle $\|\cdot\|' := \|\cdot\|$ in (48) einfach $a := b := 1$ wählen können. Äquivalenz von Normen ist also eine reflexive Relation.

Symmetrie: Ist $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|'$ äquivalent, so finden wir $a, b > 0$ mit (48). Dann ist

$$\frac{1}{b}\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq \frac{1}{a}\|\cdot\|,$$

also $\|\cdot\|'$ zu $\|\cdot\|$ äquivalent.

Transitivität: Ist $\|\cdot\|$ zur Norm $\|\cdot\|'$ äquivalent und $\|\cdot\|'$ zu einer Norm $\|\cdot\|''$, so gibt es reelle Zahlen $a, b, a', b' > 0$ derart, dass (48) gilt und $a'\|\cdot\|'' \leq \|\cdot\|' \leq b'\|\cdot\|''$. Somit gilt

$$\|\cdot\| \leq b\|\cdot\|' \leq bb'\|\cdot\|''$$

und

$$\|\cdot\| \geq a\|\cdot\|' \geq aa'\|\cdot\|'';$$

folglich sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|''$ äquivalent. □

Satz 7.15 *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zueinander äquivalent.*

Im Beweis nutzt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß (die auch im Kapitel über Kompaktkeit noch einmal benutzt werden kann):

Lemma 7.16 *Es sei $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann hat jede Folge im Würfel $[-r, r]^n$ eine in $\mathbb{R}^n$ konvergente Teilfolge.*

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist der Satz von Bolzano-Weierstraß. Induktionsschritt: Sei nun $n \geq 2$ und gelte die Aussage des Lemmas mit $n - 1$ an Stelle von n. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-r, r]^n$, wobei

$$x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$$

mit den Komponenten $x_{m,1}, \ldots, x_{m,n} \in [-r, r]$. Nach dem Satz von Bolano-Weierstraß hat die Zahlenfolge $(x_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ in $[-r, r]$ eine in $\mathbb{R}$ gegen ein $z_n \in \mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(x_{m_k,n})_{k\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $[-r, r]^{n-1}$ mit $y_k := (x_{m_k,1}, \ldots, x_{m_k,n-1})$ hat per Induktionsvoraussetzung eine in $\mathbb{R}^{n-1}$ gegen ein $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ konvergente Teilfolge $(y_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$. Nach Satz 7.11 haben wir für jedes $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ für die $j$te Komponente also

$$x_{m_{k_\ell},j} = y_{k_\ell,j} \to z_j$$

für $\ell \to \infty$. Da die Folge $(x_{m_k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen z_n konvergiert, konvergiert auch ihre Teilfolge $(x_{m_{k_\ell},n})_{\ell\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen z_n. Dann ist $(x_{m_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die in $\mathbb{R}^n$ gegen $(z_1, \ldots, z_n)$ konvergiert (denn für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ konvergiert die $j$te Komponente gegen z_j). □

Beweis von Satz 7.15. Nach Lemma 7.14 ist Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf $\mathbb{R}^n$. Wir brauchen daher nur zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ zur Maximumnorm

$$\|\cdot\|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, \qquad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

(für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) äquivalent ist. Mit den Standard-Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ erhalten wir mit Subadditivität und positiver Homogenität von $\|\cdot\|$ zunächst

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\|\sum_{k=1}^n x_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \|e_k\| = b\|x\|_\infty \end{aligned}$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, mit

$$b := \sum_{k=1}^n \|e_k\|.$$

Also gilt

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad \|x\| \leq b\|x\|_\infty \tag{49}$$

und somit auch $\|x - y\| \leq b\|x - y\|_\infty$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x$$

ist also Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L := b$ als Abbildung von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, und somit stetig. Nun ist die Menge

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_\infty = 1\} = \|\cdot\|_\infty^{-1}(\{1\})$$

in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen (da die Norm $\|\cdot\|_\infty$ nach Satz 7.10 stetig ist und S das Urbild der einpunktigen (also abgeschlossenen) Menge $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $\|\cdot\|_\infty$ ist). Wir wählen eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in S derart, dass

$$\|x_m\| \to \inf\{\|x\| \colon x \in S\} \quad \text{für } m \to \infty.$$

Schreiben wir $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$, so ist $(x_{m,1})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-1, 1]$ (also beschränkt), da $|x_{m,1}| \leq \|x_m\|_\infty = 1$. Nach Lemma 7.16 hat $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine gegen ein $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ konvergente Teilfolge $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Nach Übergang zu dieser Teilfolge dürfen wir also annehmen, dass $x_m \to y$ für $m \to \infty$. Da $x_m \in S$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und S in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen ist, folgt mit Satz C.11, dass

$$y = \lim_{m\to\infty} x_m \in S;$$

insbesondere ist $\|y\|_\infty = 1$ und somit $y \neq 0$. Da $\|\cdot\| \circ f$ auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ stetig ist mit f wie oben, folgt

$$\|x_m\| = \|f(x_m)\| \to \|f(y)\| = \|y\|$$

für $m \to \infty$. Folglich ist

$$a := \inf\{\|x\| \colon x \in S\} = \|y\| > 0.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Für $x = 0$ ist $\|x\| \geq a\|x\|_\infty$ trivial. Weiter gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$:

$$\|x\| = \left\| \|x\|_\infty \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\| = \|x\|_\infty \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} x \right\| \geq a\|x\|_\infty,$$

weil $\left\|\frac{1}{\|x\|_\infty}x\right\|_\infty = \frac{1}{\|x\|_\infty}\|x\|_\infty = 1$ und somit $\frac{1}{\|x\|_\infty}x \in S$. Also gilt

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) \qquad a\|x\|_\infty \leq \|x\|. \tag{50}$$

Wegen (49) und (50) sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent. $\square$

Folgerung 7.17 *Für jeden endlich-dimensionalen reellen Vektorraum E sind alle Normen auf E zueinander äquivalent.*

Beweis. Sei n die Dimension von E; es gibt dann einen Isomorphismus $\phi\colon \mathbb{R}^n \to E$ von reellen Vektorräumen. Sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ Normen auf E, so sind $\|\cdot\| \circ \phi$ und $\|\cdot\|' \circ \phi$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Da diese nach dem vorigen Satz äquivalent sind, gibt es $a, b > 0$ derart, dass

$$a\,\|\cdot\|' \circ \phi \;\leq\; \|\cdot\| \circ \phi \;\leq\; b\,\|\cdot\|' \circ \phi.$$

Komponieren mit ϕ^{-1} von rechts liefert

$$a\,\|\cdot\|' \;\leq\; \|\cdot\| \;\leq\; b\,\|\cdot\|'$$

und somit die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$. $\square$

Äquivalenz von Normen ist u.a. wegen folgender Tatsache von Interesse:

Lemma 7.18 *Für Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem reellen Vektorraum E sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $\|\cdot\|$ *und* $\|\cdot\|'$ *sind äquivalente Normen.*

(b) *Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ führen zu den gleichen offenen Mengen in E, d.h. für jede Teilmenge $V \subseteq E$ gilt: V ist genau dann in $(E, \|\cdot\|)$ offen, wenn V in $(E, \|\cdot\|')$ offen ist.*

Beweis. In der Vorlesung beweisen wir nur "(a)$\Rightarrow$(b)", da die umgekehrte Implikation irrelevant für uns ist. Es genügt zu zeigen, dass jede in $(E, \|\cdot\|)$ offene Menge V auch in $(E, \|\cdot\|')$ offen ist (da wir die Rollen von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ vertauschen können). Seien $a > 0$ und $b > 0$ wie in (48). Gegeben $x \in V$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subseteq V$. Dann ist $B_{\varepsilon/b}^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq V$ (und somit Offenheit von V in $(E, \|\cdot\|')$ gezeigt); ist nämlich $y \in B_{\varepsilon/b}^{\|\cdot\|'}(x)$, so ist $\|y - x\|' < \varepsilon/b$, somit unter Benutzung von (48)

$$\|y - x\| \leq b\|y - x\|' < b\varepsilon/b = \varepsilon$$

und folglich $y \in B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x)$.

(b)$\Rightarrow$(a): Die Kugel $B_1^{\|\cdot\|}(0)$ ist offen in E bzgl. der zu $\|\cdot\|$ gehörigen Metrik d, per Voraussetzung also auch bezüglich der zu $\|\cdot\|'$ gehörigen Metrik d'. Sie enthält also $B_\varepsilon^{\|\cdot\|'}(0)$ für ein $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in E$ mit $\|x\|' < \varepsilon$ gilt also $\|x\| < 1$. Gegeben $y \in E$ mit $y \neq 0$ folgt für alle

$$0 < t < \frac{\varepsilon}{\|y\|'},$$

dass

$$\|ty\|' = t\,\|y\|' < \varepsilon,$$

so dass nach dem Vorigen $t\,\|y\| = \|ty\| < 1$ und folglich

$$\|y\| < \frac{1}{t}.$$

Im Grenzwert $t \to \frac{\varepsilon}{\|y\|'}$ folgt

$$\|y\| \leq \frac{1}{\varepsilon/\|y\|'} = \frac{1}{\varepsilon}\|y\|'.$$

Im verbleibenden Fall $y = 0$ gilt $\|y\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|y\|'$ trivialerweise, denn beide Seiten sind 0. Wir haben also

$$\|\cdot\| \leq b\,\|\cdot\|'$$

mit $b := \frac{1}{\varepsilon}$. Vertauschen der Rollen der zwei Normen liefert ein $c > 0$ derart, dass $\|\cdot\|' \leq c\,\|\cdot\|$ und somit

$$a\,\|\cdot\|' \leq \|\cdot\|$$

mit $a := \frac{1}{c}$. Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind also äquivalent. □

Bemerkung 7.19 Da nach Satz 7.15 jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ zur Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist, definiert sie nach Lemma 7.14 die gleichen offenen Mengen, somit die gleichen Umgebungen eines Punkts (vgl. Bemerkung C.6 (c) und (d)) und somit die gleichen konvergenten Folgen (siehe Lemma C.10(b)). Nach Satz 7.11(b) gilt somit:

Eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen ein $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, wenn $\mathrm{pr}_k(x_m) \to y_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Weiter sind nach Satz 7.11(a) auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ die Projektionen $\mathrm{pr}_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alle stetig. Zudem ist für einen metrischen Raum Y eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon Y \to \mathbb{R}^n$ genau dann stetig nach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, wenn jede der Komponenten $f_k\colon Y \to \mathbb{R}$ stetig ist (unter Benutzung von Satz 7.11(e)). Schließlich erhalten wir:

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *ist ein Banachraum.*

Um dies einzusehen, sei $b > 0$ mit $\|\cdot\|_\infty \leq b\|\cdot\|$. Ist nun $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|x_m - x_\ell\| < \frac{\varepsilon}{b} \quad \text{für alle } m, \ell \geq N$$

und somit $\|x_m - x_\ell\|_\infty \leq b\|x_m - x_\ell\| < \varepsilon$. Also ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, somit dort konvergent (nach Satz 7.11(d)) und somit auch in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, da beide normierten Räume die gleichen konvergenten Folgen haben.

Bemerkung 7.20 Sei E ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to E$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Sei $\|\cdot\|_E$ eine Norm auf E und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_E \circ \phi$ die entsprechende Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

Eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in E konvergiert genau dann gegen $x \in E$, wenn $y_m := \phi^{-1}(x_m)$ gegen $y := \phi^{-1}(x)$ konvergiert.

Denn es ist

$$\|x_m - x\|_E = \|\phi(y_m) - \phi(y)\|_E = \|\phi(y_m - y)\|_E = \|y_m - y\|;$$

die linke Seite geht genau dann gegen 0 für $m \to \infty$, wenn dies für die rechte Seite gilt.

Bemerkung 7.21 Normen auf einem komplexen Vektorraum E lassen sich analog diskutieren. Die Bedingung für positive Homogenität lautet hier

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall x \in E)\ \ \|zx\| = |z| \cdot \|x\|.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ insbesondere auch eine Norm auf E, betrachtet als reeller Vektorraum. Aus Satz 7.15 und Satz 7.11(d) folgt also, dass alle Normen auf dem komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ (der reell zu $\mathbb{R}^{2n}$ isomorph ist) äquivalent sind und $\mathbb{C}^n$ mit jeder solchen ein komplexer Banachraum ist. Alle wesentlichen Begriffe und Resultate lassen sich unmittelbar vom reellen auf den komplexen Fall übertragen, indem wir in den Formulierungen und Beweisen einfach $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen (worauf hier verzichtet wird).

Definition 7.22 Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so nennen wir eine Teilmenge $M \subseteq E$ *beschränkt*, wenn

$$\sup\{\|x\| \colon x \in M\} < \infty.$$

Bemerkung 7.23 Wie im reellwertigen Fall sieht man, dass jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (und somit auch jede konvergente Folge) in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|_E)$ beschränkt ist, also die Menge $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder in E beschränkt ist.[11]

Bemerkung 7.24 Äquivalente Normen auf einem Vektorraum E führen offenbar zu den gleichen beschränkten Mengen; insbesondere liefern alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ die gleichen beschränkten Teilmengen.

Wir schließen mit interessanten Beispielen stetiger reellwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ und zugehöriger Notation.

Beispiel 7.25 Für einen sogenannten *Multi-Index* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0$ können wir das Monom

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n} =: x^\alpha$$

betrachten. Dieses ist stetig, denn es ist ein Produkt

$$f = (\mathrm{pr}_1)^{\alpha_1} \cdots (\mathrm{pr}_n)^{\alpha_n}$$

stetiger Funktionen, mit Notation wie in Satz 7.11(a). Hierbei haben wir Satz C.16(a) benutzt.

Beispiel 7.26 Per Definition ist ein Polynom p in n Variablen eine Linearkombination von Monomen wie in Beispiel 7.25. Schreiben wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

für einen Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist also p eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \, x^\alpha$$

mit einem $m \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Jedes Polynom ist stetig, als Linearkombination stetiger Funktionen (siehe Satz C.16(b)).

[11] Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|x_n - x_m\|_E \le 1$ für alle $n, m \ge N$. Mit $m := N$ folgt $\|x_n\|_E \le \|x_n - x_N\|_E + \|x_N\|_E \le \|x_N\|_E + 1$. Also ist $\|x_n\|_E \le \max\{\|x_1\|_E, \ldots, \|x_{N-1}\|_E, \|x_N\|_E + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Verallgemeinerung von Satz 7.11 auf Produkte normierter Räume sowie Produkte metrischer Räume

Wir beschreiben einige recht offensichtliche Verallgemeinerungen, die manchmal von Interesse sind.

Definition 7.27 Sind für $n \in \mathbb{N}$ metrische Räume (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) gegeben, so sei $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ das kartesische Produkt. Die *Maximummetrik* auf X ist die durch

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[\,, \quad (x, y) \mapsto \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ gegebene Abbildung.

Bemerkung 7.28 (a) Die Maximummetrik ist eine Metrik: Es ist $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} = 0$ genau dann, wenn $d_1(x_1, y_1) = \cdots = d_n(x_n, y_n) = 0$, also $x_j = y_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $x = y$. Weiter ist

$$d(y, x) = \max\big\{\underbrace{d_j(y_j, x_j)}_{=d_j(x_j, y_j)} \colon j \in \{1, \ldots, n\}\big\} = d(x, y).$$

Ist auch $z = (z_1, \ldots, z_n) \in X$, so ist $d_j(x_j, y_j) \leq d_j(x_j, z_j) + d_j(z_j, y_j) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$, folglich

$$d(x, y) = \max\big\{d_j(x_j, y_j) \colon j \in \{1, \ldots, n\}\big\} \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(b) Sind $(E_j, \|\cdot\|_j)$ normierte Räume für $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $E_1 \times \cdots \times E_n =: E$, so definiert

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| := \max\big\{\|x_j\|_j \colon j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

eine Norm $\|\cdot\|$ auf E, die wir die *Maximumnorm* nennen.[12] Ist

$$d_j\colon E_j \times E_j \to [0, \infty[, \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|_j$$

die zu $(E_j, \|\cdot\|_j)$ gehörige Metrik, so ist die zu $(E, \|\cdot\|)$ gehörige Metrik die Maximummetrik d; für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \max\big\{\|x_j - y_j\|_j \colon j \in \{1, \ldots, n\}\big\} \\ &= \max\{d_j(x_j, y_j) \colon j \in \{1, \ldots, n\}\big\} = d(x, y). \end{aligned}$$

[12]Die Normeigenschaft von $\|\cdot\|$ sieht man wie diejenige der Maximumnorm im Beweis von Satz 7.5, wo man lediglich $x_j, y_j \in E_j$ nimmt und $|x_j|$ durch $\|x_j\|_j$ ersetzt.

(c) Nehmen wir $(E_j, \|\cdot\|) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$, so ist die gerade definierte Maximumnorm genau die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$, wie eingangs des Kapitels definiert.

Satz 7.29 *Gegeben metrische Räume (X_1, d_1), …, (X_n, d_n) versehen wir $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der Maximummetrik. Dann gilt*

(a) *Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion*

$$\mathrm{pr}_k \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to X_k, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ und somit stetig.

(b) *Eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ konvergiert genau dann gegen ein $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $X_1 \times \cdots \times X_n$, wenn sie komponentenweise gegen y konvergiert, also*

$$x_{m,k} \to y_k \quad \text{für } m \to \infty,$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) *Eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Punken $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn $(x_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X_k, d_k) ist für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

(d) *Ist der metrische Raum (X_k, d_k) vollständig für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, so ist auch (X, d) vollständig.*

(e) *Ist (Z, d_Z) ein metrischer Raum und $z \in Z$, so ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \colon Z \to X_1 \times \cdots \times X_n, \quad y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_n(y))$$

genau dann stetig nach (X, d) an der Stelle z, wenn all ihre Komponenten $f_k \colon Z \to X_k$ an der Stelle z stetig sind.

Beweis. (a) Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in X ist

$$\begin{aligned} d_k(\mathrm{pr}_k(x), \mathrm{pr}_k(y)) &= d_k(x_k, y_k) \leq \max\big\{d_j(x_j, y_j) \colon j \in \{1, \ldots, n\}\big\} \\ &= d(x, y) = L\, d(x, y) \end{aligned}$$

mit $L := 1$.

(b) Da pr_k für $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist, folgt aus $x_m \to y$, dass

$$x_{m,k} = \mathrm{pr}_k(x_m) \to \mathrm{pr}_k(y) = y_k \quad \text{für } m \to \infty.$$

Gilt umgekehrt für alle Komponenten $x_{m,k} \to y_k$ für $k \to \infty$, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m \geq N_k) \;\; d_k(y_k, x_{m,k}) < \varepsilon.$$

Setzen wir $N := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, so gilt für alle $m \geq N$

$$d(y, x_m) = \max\{d_1(y_1, x_{m,1}), \ldots, d_n(y_n, x_{m,n})\} < \varepsilon.$$

Also gilt $x_m \to y$.

(c) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, wobei $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n})$ mit $x_{m,k} \in X_k$.

Ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m, \ell \geq N) \;\; d(x_m, x_\ell) < \varepsilon.$$

Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist wegen (a) dann

$$d_k(x_{m,k}, x_{\ell,k}) = d_k(\mathrm{pr}_k(x_m), \mathrm{pr}_k(x_\ell)) \leq d(x_m, x_\ell) < \varepsilon$$

für alle $m, \ell \geq N$, somit $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_k.

Ist umgekehrt $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X_k, d_k) für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, so finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m, \ell \geq N_k) \;\; d_k(x_{m,k}, x_{\ell,k}) < \varepsilon.$$

Setzen wir $N := \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, so gilt für alle $m, \ell \geq N$

$$d(x_m, x_\ell) = \max\{d_1(x_{m,1}, x_{\ell,1}), \ldots, d_n(x_{m,n}, x_{\ell,n})\} < \varepsilon.$$

Also ist $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d).

(d) Seien (X_1, d_1), …, (X_n, d_n) vollständig und $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, mit $x_m = (x_{m,1}, \ldots, x_{m,n}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. Für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist nach (c) dann $(x_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X_k, d_k) und somit konvergent gegen ein $y_k \in X_k$. Setzen wir $y := (y_1, \ldots, y_n)$, so konvergiert x_m komponentenweise gegen y, so dass nach (b) also $x_m \to y$ in X, für $m \to \infty$. Somit ist (X, d) vollständig.

(e) Ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$ stetig an der Stelle z, so auch die Komposition $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$, da pr_k nach Teil (a) des Satzes stetig ist.

Seien umgekehrt $f_1 \ldots, f_n$ an der Stelle z stetig. Damit f an der Stelle z stetig ist, müssen wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung W von z in Z gibt derart, dass

$$(\forall y \in W) \; d(f(y), f(z)) < \varepsilon.$$

Da f_k stetig ist an der Stelle z, gibt es eine Umgebung W_k von z in Z mit

$$(\forall y \in W_k) \; d_k(f_k(y), f_k(z)) < \varepsilon.$$

Dann ist $W := \bigcap_{k=1}^n W_k$ eine Umgebung von z und für alle $y \in W$ ist auch $y \in W_k$ für alle k, somit

$$d(f_k(y), f_k(z)) < \varepsilon.$$

Somit auch $d(f(y), f(z)) = \max\big\{d_k(f_k(y), f_k(z)) \colon k \in \{1, \ldots, n\}\big\} < \varepsilon.$ □

8 Die Supremumsnorm

Die Supremumsnorm
$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$$
einer beschränkten Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ kennen wir seit der Analysis 1; sie wurde dort u.a. im Zusammenhang mit gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen und dem Weierstraßschen Konvergenzsatz benutzt. Auch in der Analysis 2 ist uns die Supremumsnorm schon mehrfach begegnet. In diesem Kapitel stellen wir noch einmal alles Wesentliche darüber zusammen, wobei wir die aus der Analysis 1 bekannten Beweise zwar ins Skript aufnehmen, in der Vorlesung aber überspringen.

Für die Analysis ist nicht nur $\mathbb{R}^n$ mit geeigneten Normen interessant, sondern auch der unendlich-dimensionale Banachraum $C([a,b],\mathbb{R})$ stetiger reellwertiger Funktionen auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall, mit der Supremumsnorm. Als Variante benötigen wir am Ende der Analysis 2 bei der Diskussion von Differentialgleichungen zudem den entsprechenden Raum $C([a,b],\mathbb{R}^n) \cong C([a,b],\mathbb{R})^n$ stetiger Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und in der Analysis 4 auch Räume stetiger Funktionen mit Werten in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Wir gehen am Kapitelende daher kurz auf vektorwertige Funktionen ein.

Definition 8.1 Ist X eine nicht-leere Menge, so bezeichnet $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. Dies ist ein Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^X$ aller Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$. Wir schreiben kürzer auch $\ell^\infty(X) := \ell^\infty(X,\mathbb{R})$. Wir versehen $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm
$$\|\cdot\|_\infty\colon \ell^\infty(X,\mathbb{R}) \to [0,\infty[, \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}.$$
Ist $X = \mathbb{N}$, so schreibt man auch einfach $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$. Also ist ℓ^∞ die Menge aller beschränkten reellen Folgen $f = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemma 8.2 *$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$.*

Beweis. Definitheit. Es ist $0 = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}$ genau dann, wenn $|f(x)| = 0$ für alle $x \in X$, also $x = 0$.

Subadditivität. Seien $f, g \in \ell^\infty(X,\mathbb{R})$. Für jedes $x \in X$ ist
$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Bilden des Supremums über alle x liefert

$$\|f+g\|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in X\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Positive Homogenität. Es ist $\|tf\|_\infty = \sup\{|tf(x)| : x \in X\} = \sup\{|t| \cdot |f(x)| : x \in X\} = |t| \sup\{|f(x)| : x \in X\} = |t| \cdot \|f\|_\infty$. $\square$

Bemerkung 8.3 Ist X eine Menge, so definiert man allgemeiner

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} \in [0,\infty]$$

für eine beliebige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist also genau dann beschränkt, wenn $\|f\|_\infty < \infty$.

In der Analysis 1 hat uns die Supremumsnorm insbesondere genutzt im Zusammenhang mit gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen. Wir erinnern an die Grundbegriffe.

Definition 8.4 Sei X eine Menge, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$.

(a) Man sagt, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen f, wenn für jedes $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
gilt, also

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(b) Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in X$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

gilt, so sagt man, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f. Gefordert ist also

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in X)\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Bemerkung 8.5 Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x \in X) \;\; |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Hierbei ist die Bedingung $(\forall x \in X)\; |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ zu

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)| \colon x \in X\} \;\leq\; \varepsilon$$

äquivalent, also zu $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Somit gilt:

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, wenn $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Bemerkung 8.6 Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Nach Bemerkung 8.5 konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $f_n \to f$ in $(\ell^\infty(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Satz 8.7 *Für jede nicht-leere Menge X ist $(\ell^\infty(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.*

Beweis. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\ell^\infty(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N)\; \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon,$$

also

$$(\forall n, m \geq N)(\forall x \in X)\; |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{51}$$

Halten wir $x \in X$ fest, so gilt also $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Somit ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und folglich konvergent gegen eine reelle Zahl $f(x)$. Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ in (51) liefert

$$(\forall n \geq N)\; |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Da dies für alle x gilt, ist also

$$(\forall m \geq N)\; \|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon. \tag{52}$$

Zudem ist $\|f\|_\infty \leq \varepsilon + \|f_N\|_\infty < \infty$ weil

$$|f(x)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq \varepsilon + \|f_N\|_\infty$$

für alle $x \in X$. Also ist f eine beschränkte Funktion. Wegen (52) gilt $f_m \to f$ für $m \to \infty$ in $(\ell^\infty(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. $\square$

Wir wenden uns nun stetigen Funktionen zu und erinnern zunächst an eine grundlegende Tatsache aus der Analysis 1:

Satz 8.8 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$, so ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x \in X$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f(y) - f_n(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in X$ und alle $n \ge N$. Insbesondere gilt

$$|f(y) - f_N(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in X. \tag{53}$$

Da f_N an der Stelle x stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f_N(y) - f_N(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in X \text{ mit } d(x,y) \le \delta. \tag{54}$$

Für all $y \in X$ mit $d(x,y) \le \delta$ folgt

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \\ &\le |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hierbei wurde (54) benutzt und zweimal (53) (einmal mit dem gegebenen y, einmal mit x an Stelle von y). Also ist f stetig an der Stelle x. $\square$

Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist die Menge $BC(X) := BC(X,\mathbb{R})$ aller beschränkten, stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ offenbar ein Untervektorraum von $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$. Wir schreiben auch $\|\cdot\|_\infty$ für die Supremumsnorm auf $BC(X,\mathbb{R})$,

$$\|\cdot\|_\infty\colon BC(X,\mathbb{R}) \to [0,\infty[, \quad f \mapsto \|f\|_\infty.$$

Dies ist eine Norm wegen des folgenden Lemmas.

Lemma 8.9 *Ist $(E,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $F \subseteq E$ ein Untervektorraum, so ist*

$$F \to [0,\infty[, \quad x \mapsto \|x\| \tag{55}$$

eine Norm auf F.

Die in (55) definierte Norm nennt man die auf F *induzierte Norm.*

Beweis. Sei $\|x\|_F := \|x\|$ für $x \in F$. Gegeben $x, y \in F$ gilt $\|x\|_F = 0$ genau dann, wenn $\|x\| = 0$, also $x = 0$. Weiter ist $\|x+y\|_F = \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| = \|x\|_F + \|y\|_F$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt zudem $\|tx\|_F = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| = |t| \cdot \|x\|_F$. □

Aus Satz 8.7 und Satz 8.8 folgt nun unmittelbar:

Folgerung 8.10 *Für jeden metrischen Raum* (X, d) *ist* $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, so auch im Banachraum $(\ell^\infty(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Also existiert ein $f \in \ell^\infty(X, \mathbb{R})$ derart, dass $f_n \to f$ in $(\ell^\infty(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Nach Bemerkung 8.6 konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Nach Satz 8.8 ist f folglich stetig. Da $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, konvergiert f_n gegen f in $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. □

Beispiel 8.11 Man schreibt $C[a, b] := C([a, b], \mathbb{R})$ für die Menge aller stetigen reellwertigen[13] Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Da jede solche Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nach dem Satz vom Maximum der Analysis 1 ein Maximum und ein Minimum annimmt und somit beschränkt ist, ist

$$C([a, b], \mathbb{R}) = BC([a, b], \mathbb{R}).$$

Nach Folgerung 8.10 ist $C([a, b], \mathbb{R})$ mit der Supremums-Norm also ein Banachraum.

Definition 8.12 Eine *Reihe* in einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist eine Folge $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ von Anfangssummen mit Summanden $a_k \in E$. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

der Anfangssummen in E existiert; in diesem Fall schreiben wir auch $\sum_{n=1}^\infty a_n$ für diesen Limes. Die Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty.$$

[13] Das Symbol $C[a, b]$ wird manchmal auch für die stetigen *komplexwertigen* Funktionen benutzt. Ebenso bei $\ell^\infty(X)$.

Satz 8.13 *Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn in E jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

Beweis. Sei zunächst $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $a_n \in E$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty$. Für $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq N$

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|a_k\| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\|.$$

Für alle $n, m \geq N$, mit $n \geq m$ etwa, gilt dann

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Also ist $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E und somit konvergent.

Sei umgekehrt jede absolut konvergente Reihe in E konvergent und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E. (Diese Beweisrichtung ist weniger wichtig und wird in der Vorlesung übersprungen). Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt - die Cauchyfolge konvergiert dann ebenfalls gegen den Grenzwert der Teilfolge (siehe Lemma C.22).

Nun finden wir nacheinander $N_1 < N_2 < \cdots$ derart, dass

$$(\forall n, m \geq N_k)\ \|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}.$$

Somit ist $(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge derart, dass $\|x_{N_i} - x_{N_j}\| \leq 2^{-k}$ für alle $i, j \geq k$. Nach Ersetzen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Teilfolge $(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dürfen wir also annehmen, dass

$$(\forall i, j \geq k)\ \|x_i - x_j\| \leq 2^{-k}.$$

Insbesondere ist nun $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 2^{-k}$ und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

(Abschätzung durch geometrische Reihe). Per Voraussetzung existiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k).$$

Also konvergiert auch $x_1 + \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1}$ für $n \to \infty$ und somit auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Satz 8.14 (Weierstraßscher Konvergenzsatz) *Ist* (X, d) *ein metrischer Raum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge beschränkter stetiger Funktionen* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *derart, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty,$$

so ist die Funktionenreihe $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig konvergent gegen eine beschränkte stetige Funktion* $f\colon X \to \mathbb{R}$*. Zudem konvergiert für jedes* $x \in X$ *die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *absolut und für ihren Limes gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$*.*

Beweis. Per Voraussetzung ist die Funktionenreihe absolut konvergent. Da $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist, konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ gegen ein $f \in BC(X)$. Nach Bemerkung 8.6 konvergiert dann $\sum_{k=1}^{n} f_k$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f. Gegeben $x \in X$ ist wegen $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$ die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nach dem Majorantenkriterium der Analysis 1 absolut konvergent. Da aus gleichmäßiger Konvergenz gegen f die punktweise Konvergenz folgt, gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $\square$

Die folgende Variante behandeln wir in der Übung.

Definition 8.15 Für $k \in \mathbb{N}_0$ und reelle Zahlen $a < b$ sei $C^k[a, b] := C^k([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der C^k-Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann definiert

$$\|f\|_{C^k} := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}$$

eine Norm auf $C^k[a, b]$.

Man kann zeigen, dass $(C^k[a, b], \|\cdot\|_{C^k})$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein Banachraum ist, wir benötigen dies dieses Semester jedoch noch nicht.

Bemerkung 8.16 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon X \to F$ mit Werten in einem Banachraum $(F, \|\cdot\|_F)$ kann man analog zum reellwertigen Fall behandeln: Man ersetze lediglich überall $\mathbb{R}$ durch F und $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_F$. Insb. können Folgen komplexwertiger Funktionen analog diskutiert werden. Auch ist $(\ell^\infty(X, F), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum für jede Menge X, mit

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_F \colon x \in X\}$$

für beschränkte Funktionen $f\colon X \to F$. Ebenso der Vektorraum $(BC(X, F), \|\cdot\|_\infty)$ der beschränkten stetigen Funktionen $f\colon X \to F$, für jeden metrischen Raum (X, d). In allen Definitionen, Ergebnissen und Beweisen des Kapitels kann $\mathbb{R}$ durch F ersetzt werden und $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|_F$.

9 Stetigkeit linearer Abbildungen; Operatornorm

In der Analysis interessieren wir uns vor allem für nichtlineare Abbildungen. Dennoch spielen auch lineare Abbildungen eine wichtige Rolle, und zwar sowohl lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ (die wir durch reelle $m \times n$-Matrizen beschreiben können) als auch lineare Abbildungen $A\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen E und F, die nicht endlich-dimensional zu sein brauchen. In diesem Kapitel diskutieren wir Stetigkeit für solche linearen Abbildungen (und kurz auch die Stetigkeit bilinearer Abbildungen). Diese lässt sich durch Endlichkeit einer sogenannten Operatornorm charakterisieren.

Satz 9.1 *Sind $(E, \|\cdot\|)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und ist $\alpha\colon E \to F$ eine lineare Abbildung,*[14] *so definiert man die* Operatornorm *von α als*

$$\|\alpha\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|\alpha(x)\|_F \colon x \in E \textit{ mit } \|x\|_E \le 1\} \in [0, \infty].$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) *$\alpha\colon E \to F$ ist stetig an der Stelle* 0*;*

(b) *$\alpha\colon E \to F$ ist stetig;*

(c) *α ist ein sogenannter* beschränkter *linearer Operator, d.h. $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} < \infty$.*

In diesem Fall ist α Lipschitz-stetig, insb. gleichmäßig stetig. Weiter gilt

$$(\forall x \in E) \qquad \|\alpha(x)\|_F \le \|\alpha\|_{\mathrm{op}} \|x\|_E. \tag{56}$$

Beweis. (b)⇒(a) ist trivial.

(a)⇒(b): Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall y \in E)\ \|y\|_E < \delta \Rightarrow \|\alpha(y)\|_F < \varepsilon.$$

Für $x \in E$ und alle $y \in E$ mit $\|y - x\| < \delta$ gilt dann

$$\|\alpha(y) - \alpha(x)\|_F = \|\alpha(y - x)\|_F < \varepsilon.$$

Also ist α an der Stelle x stetig.

[14] Also $\alpha(tx + sy) = t\alpha(x) + s\alpha(y)$ für alle $x, y \in E$, $t, s \in \mathbb{R}$.

(a)⇒(c): Ist α stetig in 0, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $\|\alpha(x)\|_F \leq 1$ für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq \delta$. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist $\|\delta x\|_E = \delta\|x\|_E \leq \delta$, somit

$$\|\alpha(x)\|_F = \frac{1}{\delta}\|\alpha(\delta x)\|_F \leq \frac{1}{\delta},$$

somit $\|\alpha\|_{\text{op}} = \sup\{\|Ax\|_F \colon \|x\|_E \leq 1\} \leq \frac{1}{\delta} < \infty$.

(c)⇒(a): Wir überlegen zunächst, dass aus (c) die Abschätzung (56) folgt. Ist $x = 0$, so ist (56) klar. Ist $x \neq 0$, so ist wegen der positiven Homogenität

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_E} x \right\|_E = \frac{1}{\|x\|_E}\|x\|_E = 1 \leq 1,$$

somit

$$\|\alpha(x)\|_F = \|x\|_E \left\| \alpha\left(\frac{1}{\|x\|_E} x\right) \right\|_F \leq \|x\|_E \|\alpha\|_{\text{op}}.$$

Also gilt (56). Ersetzen wir dort x durch $x - y$, so sehen wir, dass

$$(\forall x, y \in E) \qquad \|\alpha(x) - \alpha(y)\|_F = \|\alpha(x-y)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|x-y\|_E.$$

Also ist α Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = \|\cdot\|_{\text{op}}$. □

Beispiele 9.2 (a) Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion

$$\text{pr}_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

auf die $k$te Komponente stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|\text{pr}_k\|_{\text{op}} = 1$. Ist nämlich $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $1 \geq \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, so ist $|\text{pr}_k(x)| = |x_k| \leq 1$. Bildung des Supremums über alle x liefert $\|\text{pr}_k\|_{\text{op}} \leq 1$. Für den Einheitsvektor $x := e_k$ ist $\|x\|_\infty = 1$ und $\text{pr}_k(x) = 1$. Also ist $\|\text{pr}_k\|_{\text{op}} = 1$.

(b) Der Ableitungsoperator

$$D \colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad f \mapsto f'$$

ist linear und stetig mit Operatornorm $\|D\|_{\text{op}} \leq 1$, wenn wir $C^1[0,1]$ mit $\|\cdot\|_{C^1}$ (wie in Bemerkung 8.15) und $C[0,1]$ mit $\|\cdot\|_\infty$ versehen. Das rechnen wir in der Übung nach (und ebenso die Aussagen aus (c) und (d)).

(c) Wie zuvor sei $C[0,1]$ der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$ und $C^1[0,1]$ der Raum der C^1-Funktionen. Versehen wir (was recht unnatürlich ist) beide Räume mit der Maximumnorm, so ist der Ableitungsoperator $D\colon C^1[0,1] \to C^0[0,1]$ unstetig.

(d) Analog zu (b) ist

$$D\colon C^{n+1}[0,1] \to C^n[0,1], \quad f \mapsto f'$$

stetig von $(C^{n+1}[0,1], \|\cdot\|_{C^{n+1}})$ nach $(C^n[0,1], \|\cdot\|_{C^n})$, mit Operatornorm $\|D\|_{\mathrm{op}} \leq 1$.

Bemerkung 9.3 Ist $\alpha\colon E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ derart, dass für eine reelle Zahl $C \geq 0$

$$\|\alpha(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E \quad \text{für alle } x \in E, \tag{57}$$

so ist α stetig mit $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq C$. Für $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ ist wegen (57) nämlich

$$\|\alpha(x)\|_F \leq C\,\|x\|_E \leq C;$$

Bildung des Supremums $\|\alpha\|_{\mathrm{op}}$ über alle x liefert $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq C$.

Zusammen mit (56) schließen wir:

Ist α stetig, so ist $\|\alpha\|_\infty$ die kleinste Konstante C mit (57).

Ist $\alpha\colon E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen, so gilt

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in E$. Im Fall einer stetigen linearen Abbildung zwischen normierten Räumen gilt Entsprechendes für unendliche Reihen:

Satz 9.4 *Ist $\alpha\colon E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$, so ist für jede konvergente Reihe $\sum_{k=1}^\infty x_k$ in E die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \alpha(x_k)$ in F konvergent und*

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k).$$

Ist $\sum_{k=1}^\infty x_k$ in E absolut konvergent, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \alpha(x_k)$ in F absolut konvergent.

Beweis. Die erste Aussage gilt, da

$$\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \alpha\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_{n\to\infty}\alpha\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha(x_k).$$

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_E < \infty$. Da

$$\|\alpha(x_k)\|_F \leq \|\alpha\|_{\text{op}}\|x_k\|_E,$$

ist die konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\|\alpha\|_{\text{op}}\|x_k\|_E$ eine Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty}\|\alpha(x_k)\|_F$, letztere Reihe also konvergent nach dem Majorantenkriterium der Analysis 1 und somit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(x_k)$ absolut konvergent. □

Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen sind automatisch stetig.

Satz 9.5 *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $(F, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt:*

(a) *Jede lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to F$ ist stetig. Insbesondere gilt:*

(b) *Jede lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig.*

Beweis. Es seien $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ die Standard-Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$. Offenbar ist (b) ein Spezielfall von (a). Um (a) zu beweisen, sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$. Dann gilt $|x_i| \leq 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ erhalten wir

$$\|\alpha(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|\alpha(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(e_i)\|.$$

Also ist $\|\alpha\|_{\text{op}} \leq \sum_{i=1}^{n}\|\alpha(e_i)\| < \infty$, folglich α stetig. □

Bemerkung 9.6 Wir schreiben $\mathbb{R}^{m\times n}$ für den Vektorraum der $m\times n$-Matrizen. Jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ können wir eine lineare Abbildung

$$\phi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax$$

zwischen Räumen von Spaltenvektoren zuordnen, die Multiplikation der gegebenen Matrix mit Vektoren. Wählen wir auf $E = \mathbb{R}^n$ eine Norm $\|\cdot\|_E$ und auf $F = \mathbb{R}^m$ eine Norm $\|\cdot\|_F$, so ist ϕ_A nach Satz 9.5 stetig. Nach Satz 9.1

ist die Operatornorm der linearen Abbildung ϕ_A also endlich. Wir können daher der Matrix A wie folgt die Zahl

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \|\phi_A\|_{\mathrm{op}} \in [0, \infty[$$

zuordnen. Man nennt diese die *Operatornorm der Matrix A* (bzgl. den gegebenen Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$). Es ist also

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|Ax\|_F \colon x \in E \text{ mit } \|x\|_E \leq 1\}.$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $\|\cdot\|$ eine gegebene Norm of $\mathbb{R}^n$, so genügt meist der Fall $\|\cdot\|_E := \|\cdot\|_F := \|\cdot\|$; wir nennen

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|Ax\| \colon x \in E \text{ mit } \|x\| \leq 1\} \in [0, \infty[$$

die *zu $\|\cdot\|$ gehörige Operatornorm* von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Satz 9.7 *Gegeben $n \in \mathbb{N}$ sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und*

$$\|\cdot\|_{\mathrm{op}} \colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

die zugehörige Operatornorm. Dann gilt:

(a) $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ *ist eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ ist ein Banachraum.*

(b) *Für die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$ gilt $\|\mathbf{1}_n\|_{\mathrm{op}} = 1$.*

(c) *(Submultiplikativität). Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$.*

(d) *Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\|A^k\|_{\mathrm{op}} \leq (\|A\|_{\mathrm{op}})^k$.*

Beweis. (a) Per Definition ist $\|A\|_{\mathrm{op}} \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definitheit: Ist A nicht die Nullmatrix $\mathbf{0}_n$, so ist die $j$te Spalte v_j von A nicht Null für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sind $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$ die Standard-Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^n$, so ist also $Ae_j = v_j$ nicht der Nullvektor und somit

$$\|Ae_j\| > 0,$$

folglich $\|A\|_{\mathrm{op}} \geq \|A\frac{1}{\|e_j\|}e_j\| = \frac{1}{\|e_j\|}\|Ae_j\| > 0$.

Subadditivität: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq 1$

$$\|(A+B)v\| = \|Av + Bv\| \leq \|Av\| + \|Bv\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}} + \|B\|_{\mathrm{op}}.$$

Bildung des Supremums über alle v liefert $\|A+B\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} + \|B\|_{\mathrm{op}}$.

Positive Homogenität: Sei $t \in \mathbb{R}$. Ist $t = 0$, so ist $\|tA|_{\mathrm{op}} = \|\mathbf{0}_n\|_{\mathrm{op}} = 0 = |t|\,\|A\|_{\mathrm{op}} \leq |t|\,\|A\|_{\mathrm{op}}$. Ist $t \neq 0$, so ist

$$\|tAv\| = |t|\,\|Av\|$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq 1$. Da Multiplikation mit $|t| > 0$ ein Ordnungsisomorphismus von $(\mathbb{R}, \leq)$ ist (bzw. wegen einer wohlbekannten Rechenregel der Analysis 1), folgt

$$\|tA\|_{\mathrm{op}} = \sup\{|t|\,\|Av\| \colon v \in \overline{B}_1^E(0)\} = |t| \sup\{\|Av\| \colon v \in \overline{B}_1^E(0)\} = |t|\,\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

(b) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq 1$ ist $\|\mathbf{1}_n v\| = \|v\| \leq 1$; Bildung des Supremums über alle v liefert

$$\|{}_n\|_{\mathrm{op}} \leq 1.$$

Da $v := \frac{1}{\|e_1\|}$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$ ist, ist weiter $\|\mathbf{1}_n\|_{\mathrm{op}} \geq \|\mathbf{1}_n v\| = \|v\| = 1$, somit $\|\mathbf{1}_n\|_{\mathrm{op}} = 1$.

(c) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq 1$

$$\|ABv\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|Bv\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}\|v\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$$

unter zweimaliger Benutzung von (56). Bildung des Supremums über alle v ergibt $\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|B\|_{\mathrm{op}}$.

(d) Für $k = 0$ ist $\|A^k\|_{\mathrm{op}} = \|\mathbf{1}_n\|_{\mathrm{op}} = 1 = (\|A\|_{\mathrm{op}})^k$. Induktionsschritt: Ist $k \in \mathbb{N}_0$ und gilt bereits $\|A^k\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}^k$, so folgt unter Benutzung der Submultiplikativität der Operatornorm

$$\|A^{k+1}\|_{\mathrm{op}} = \|A^k A\|_{\mathrm{op}} \leq \|A^k\|_{\mathrm{op}}\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}^k \|A\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}}^{k+1},$$

was den Beweis beendet. □

Definition 9.8 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\|A^k\|_{\mathrm{op}} \leq (\|A\|_{\mathrm{op}})^k$ für jedes k und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} A^k \right\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\|A\|_{\mathrm{op}})^k = e^{\|A\|_{\mathrm{op}}} < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ ist in $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ also absolut konvergent und somit konvergent, da $\mathbb{R}^{n\times n}$ als endlich-dimensionaler Vektorraum vollständig (also ein Banach-Raum) ist. Wir definieren

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{58}$$

Die Definitionen, Sätze und Beweise des Kapitels funktionieren ebenso für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$. Insbesondere konvergiert (58) auch für jede komplexe $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Bemerkung 9.9 Machen wir uns noch genauer klar, was die Konvergenz der Reihe $(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k)_{m\in\mathbb{N}_0}$ von Matrizen bedeutet, und allgemeiner die Konvergenz einer Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $n \times n$-Matrizen gegen eine $n \times n$-Matrix A.

Indem wir eine $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Zeilen $z_1, \ldots, z_n$ mit dem Zeilenvektor $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren, identifizieren wir $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$. Die beschriebene Zuordnung ist insbesondere ein Isomorphismus von reellen Vektorräumen. Eine Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert genau dann gegen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn jede Komponente der Zeilen von A_m gegen die entsprechende Komponente der Zeile von A konvergiert (siehe Bemerkung 7.20 und Bemerkung 7.19); es müssen also alle Matrixeinträge konvergieren. In Formeln: Schreiben wir für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathrm{pr}_{i,j}(A) := a_{ij},$$

so muss für alle i und j gelten

$$\mathrm{pr}_{i,j}(A_m) \to \mathrm{pr}_{i,j}(A) \quad \text{für } m \to \infty.$$

Analog in $\mathbb{C}^{n\times n}$.

In Teil (c) des folgenden Satzes versehen wir $E \times E$ mit der Maximum-Norm,

$$\|(x, y)\|_{\infty} := \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad \text{für } x, y \in E,$$

wie in Bemerkung 7.28(b). Ebenso versehen wir in Teil (e) das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times E$ mit der Maximum-Norm,

$$\|(t,x)\|_\infty := \max\{|t|, \|x\|\} \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x \in E.$$

Satz 9.10 *Für jeden normierten Raum $(E, \|.\|)$ sind folgende Abbildungen stetig:*

(a) *Für festes $t \in \mathbb{R}$ die Homothetie $h_t\colon E \to E$, $x \mapsto tx$;*

(b) *Für festes $x \in E$ die Translation $t_x\colon E \to E$, $y \mapsto y + x$;*

(c) *Die Addition $\alpha\colon E \times E \to E$, $\alpha(x,y) := x + y$;*

(d) *Für jedes $x \in E$ die Abbildung $\iota_x\colon \mathbb{R} \to E$, $t \mapsto tx$.*

Weiter ist folgende bilineare Abbildung stetig:

(e) *Die Multiplikation μ mit Skalaren, $\mu\colon \mathbb{R} \times E \to E$, $\mu(t,x) := tx$.*

Beweis. Wir beweisen (und benutzen) zunächst nur (a)–(d):

(a) h_t ist linear. Für $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$ ist $\|h_t(x)\| = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| \leq |t|$, somit $\|h_t\|_{\mathrm{op}} \leq |t|$.

(b) Es ist $\|t_x(y) - t_x(z)\| = \|(x+y) - (x+z)\| = \|y - z\| \leq L\|y - z\|$ mit $L = 1$, d.h. t_x ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$.

(c) Die Abbildung α ist linear. Sei $(x,y) \in E \times E$ mit $1 \geq \|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Dann ist $\|\alpha(x,y)\| = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 1+1 = 2$. Also ist $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq 2$.

(d) Die Abbildung ι_x ist linear. Sei $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$. Dann ist $\|\iota_x(t)\| = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| \leq \|x\|$, also $\|\iota_x\|_{\mathrm{op}} \leq \|x\|$.

(e) Sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Limes t und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in E mit Limes x. Da $|t_n|$ gegen $|t|$ konvergiert, ist $(|t_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Die Behauptung gilt, da

$$\begin{aligned}
\|t_n x_n - tx\| &= \|t_n x_n - t_n x + t_n x - tx\| \leq \|t_n x_n - t_n x\| + \|t_n x - tx\| \\
&= |t_n|\,\|x_n - x\| + |t_n - t|\,\|x\| \to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. □

Satz 9.11 *Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume. Für eine bilineare Abbildung $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ sind äquivalent:*

(a) *β ist stetig.*

(b) *β ist stetig in $(0,0)$.*

(c) *Es ist*

$$\|\beta\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|\beta(x,y)\|_F \colon (x,y) \in E_1 \times E_2 \textit{ mit } \|x\|_1 \leq 1 \textit{ und } \|y\|_2 \leq 1\} < \infty.$$

In diesem Fall gilt

$$(\forall x \in E_1)(\forall y \in E_2) \quad \|\beta(x,y)\|_F \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \|x\|_1 \|y\|_2. \tag{59}$$

Hierbei wird in (a) und (b) $E_1 \times E_2$ mit der Maximumnorm versehen,

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x\|_1, \|y\|_2\} \quad \text{für } (x,y) \in E_1 \times E_2.$$

Beweis. Die Implikation (a)$\Rightarrow$(b) ist trivial.

Gilt (b), so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\overline{B}_\varepsilon^{E_1 \times E_2}(0,0) \subseteq \beta^{-1}(\overline{B}_1^F(0)),$$

wobei

$$\begin{aligned} \overline{B}_\varepsilon^{E_1 \times E_2}(0,0) &= \{(x,y) \in E_1 \times E_2 \colon \max\{\|x|_1, \|y\|_2\} = \|(x,y)\|_\infty \leq \varepsilon\} \\ &= \overline{B}_\varepsilon^{E_1}(0) \times \overline{B}_\varepsilon^{E_2}(0). \end{aligned}$$

Sind $(x,y) \in E_1 \times E_2$ mit $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$, so ist $\|(\varepsilon x, \varepsilon y)\|_\infty \leq \varepsilon$, folglich

$$\|\beta(x,y)\|_F = \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} \beta(\varepsilon x, \varepsilon y) \right\|_F = \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\|\beta(\varepsilon x, \varepsilon y)\|_F}_{\leq 1} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Also ist $\|\beta\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} < \infty$ und (c) gilt.

Wir zeigen nun, dass aus (c) die Abschätzung (59) folgt. Seien $(x,y) \in E_1 \times E_2$ und $t, s > 0$ positive reelle Zahlen mit $t \geq \|x\|_1$ und $s \geq \|y\|_2$. Dann gilt $\|\frac{1}{t}x\|_1 = \frac{1}{t}\|x\|_1 \leq 1$ und $\|\frac{1}{s}y\|_2 \leq 1$, somit

$$\|\beta(x,y)\|_F = \left\| ts\, \beta\Big(\frac{1}{t}x, \frac{1}{s}y\Big) \right\|_F = ts \underbrace{\left\| \beta\Big(\frac{1}{t}x, \frac{1}{s}y\Big) \right\|_F}_{\leq \|\beta\|_{\mathrm{op}}} \leq ts \|\beta\|_{\mathrm{op}}.$$

Übergang zum Infimum in t und dann in s liefert $\|\beta(x,y)\|_F \leq \|x\|_1\|y\|_2\|\beta\|_{\text{op}}$.

Gilt (c), so zeigen wir die Stetigkeit von β an einer gegebenen Stelle $(x,y) \in E_1 \times E_2$. Seien hierzu $(x_n,y_n) \in E_1 \times E_2$ mit $(x_n,y_n) \to (x,y)$, also $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Wegen Satz 7.10 gilt dann $\|x_n\|_1 \to \|x\|_1$ für $n \to \infty$. Unter Benutzung von (59) schließen wir, dass

$$\begin{aligned}
\|\beta(x,y) - \beta(x_n,y_n)\|_F &\leq \|\beta(x,y) - \beta(x_n,y)\|_F + \|\beta(x_n,y) - \beta(x_n,y_n)\|_F \\
&= \|\beta(x-x_n,y)\|_F + \|\beta(x_n,y-y_n)\|_F \\
&\leq \underbrace{\|x-x_n\|_1}_{\to 0}\|y\|_2\|\beta\|_{\text{op}} + \underbrace{\|x_n\|_1}_{\to\|x\|_1}\underbrace{\|y-y_n\|_2}_{\to 0}\|\beta\|_{\text{op}} \to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$ und somit $\beta(x_n,y_n) \to \beta(x,y)$. Also ist β an der Stelle (x,y) stetig. □

Beweis von Satz 9.10(e). Sind $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \leq 1$ und $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$, so ist $\|\mu(t,x)\| = \|tx\| = |t| \cdot \|x\| \leq 1$, also $\|\mu\|_{\text{op}} \leq 1 < \infty$ und folglich μ stetig. □

Bilineare Abbildungen auf endlich-dimensionalen Definitionsbereichen sind automatisch stetig.

Satz 9.12 *Seien $n,m,k \in \mathbb{N}$ und $(F,\|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt:*

(a) *Jede bilineare Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to E$ ist stetig. Insbesondere gilt:*

(b) *Jede bilineare Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ stetig.*

Beweis. (b) ist ein Spezialfall von (a). Beweis von (a): Es seien $e_1 = (1,0,\cdots,0)$, …, $e_n = (0,\ldots,0,1)$ die Standard-Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$. Analog dazu seien $f_1,\ldots,f_m$ die Standard-Basisvektoren des $\mathbb{R}^m$. Für $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ und $\|y\|_\infty \leq 1$ folgt mit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^m y_j f_j$, dass

$$\|\beta(x,y)\| = \left\|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m x_i y_j \beta(e_i,f_j)\right\| \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |x_i|\,|y_j|\,\|\beta(e_i,f_j)\| \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \|\beta(e_i,f_j)\|.$$

Also ist $\|\beta\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \|\beta(e_i,f_j)\| < \infty$, folglich β stetig. □

Satz 9.13 *Es seien* $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ *und* $(F, \|\cdot\|_F)$ *normierte Räume und* $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ *eine stetige bilineare Abbildung. Weiter sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine konvergente, absolut konvergente Reihe in* E_1 *und* $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ *eine konvergente, absolut konvergente Reihe in* E_2. *Dann ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *mit den Summanden*

$$c_n := \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}_0^2 \text{ mit} \\ k+\ell=n}} \beta(a_k, b_\ell)$$

in F *konvergent und absolut konvergent, mit Limes*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \beta\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell\right).$$

Beweis. Da

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|_1 < \infty \quad \text{und} \quad B := \sum_{\ell=0}^{\infty} \|b_\ell\|_2 < \infty,$$

gilt nach der Cauchyschen Produktformel der Analysis 1

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$$

mit

$$C_n := \sum_{k+\ell=n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2.$$

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass Produkte konvergenter Zahlenfolgen gegen das Produkt der Grenzwerte konvergieren. Also gilt

$$AB = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \|a_k\|_1\right) \left(\sum_{\ell=0}^{n} \|b_\ell\|_2\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,\ell=0}^{n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2.$$

Schreiben wir Δ_n für die Menge aller $(k,\ell) \in \mathbb{N}_0^2$ mit $k + \ell \leq n$ und

$$R_n := \{0, \ldots, n\}^2 \setminus \Delta_n,$$

so ist

$$\sum_{m=0}^{n} C_m = \sum_{(k,\ell)\in\Delta_n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2$$

und

$$
\begin{aligned}
0 &= AB - AB = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k,\ell=0}^{n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2\right) - \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} C_m\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k,\ell=0}^{n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2 - \sum_{(k,\ell)\in\Delta_n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(k,\ell)\in R_n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2 .
\end{aligned}
$$

Sei nun $a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $b := \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$. Da $\sum_{k=0}^{n} a_k \to a$ und $\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \to b$ für $n \to \infty$, gilt

$$
\left(\sum_{k=0}^{n} a_k, \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \right) \to (a, b)
$$

in $E_1 \times E_2$, versehen mit der Supremumsnorm (siehe Satz 7.29 (b)). Da β stetig ist, folgt

$$
\beta(a, b) = \lim_{n\to\infty} \beta\left(\sum_{k=0}^{n} a_k, \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,\ell=0}^{n} \beta(a_k, b_\ell).
$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k,\ell=0}^{n} \beta(a_k, b_\ell) - \sum_{m=0}^{n} c_m \right\|_F \\
&= \left\| \sum_{k,\ell=0}^{n} \beta(a_k, b_\ell) - \sum_{(k,\ell)\in\Delta_n} \beta(a_k, b_\ell) \right\|_F \\
&= \left\| \sum_{(k,\ell)\in R_n} \beta(a_k, b_\ell) \right\|_F \\
&\leq \sum_{(k,\ell)\in R_n} \|\beta\|_{\mathrm{op}} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2 \\
&= \|\beta\|_{\mathrm{op}} \sum_{(k,\ell)\in R^n} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2 \to 0
\end{aligned}
$$

für $n \to \infty$. Es folgt

$$\sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{k,\ell=0}^{n} \beta(a_k, b_\ell) - \left(\sum_{k,\ell=0}^{n} \beta(a_k, b_\ell) - \sum_{m=0}^{n} c_m \right) \to \beta(a,b) - 0 = \beta(a,b)$$

für $n \to \infty$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist also konvergent mit Limes $\beta(a,b)$. Zudem ist sie absolut konvergent, da

$$\sum_{m=0}^{n} \|c_m\|_F \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \sum_{m=0}^{n} C_m$$

mit $\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$; hierbei wurde die Abschätzung

$$\|c_m\|_F = \left\| \sum_{k+\ell=m} \beta(a_k, b_\ell) \right\|_F \leq \sum_{k+\ell=m} \|\beta(a_k, b_k)\|_F \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \sum_{k+\ell=m} \|a_k\|_1 \|b_\ell\|_2 = \|\beta\|_{\mathrm{op}} C_m$$

benutzt. □

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, so schreiben wir $\mathcal{L}(E,F)$ für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $\alpha\colon E \to F$. Wir kürzen ab

$$\mathcal{L}(E,E) := \mathcal{L}(E).$$

Analog zu Satz 9.7 gilt:

Satz 9.14 *Jede Linearkombination von stetigen linearen Abbildungen von E nach F ist wieder stetig und linear, also $\mathcal{L}(E,F)$ ein Untervektorraum des Vektorraums F^E aller Funktionen von E nach F. Weiter ist*

$$\|\cdot\|_{\mathrm{op}}\colon \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}, \quad \alpha \mapsto \|\alpha\|_{\mathrm{op}}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}(E,F)$.

Beweis. Sind $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(E,F)$, so ist

$$\alpha + \beta\colon E \to F, \quad x \mapsto \alpha(x) + \beta(x)$$

linear. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$ gilt

$$\|(\alpha+\beta)(x)\|_F = \|\alpha(x) + \beta(x)\|_F \leq \|\alpha(x)\|_F + \|\beta(x)\|_F \leq \|\alpha\|_{\mathrm{op}} + \|\beta\|_{\mathrm{op}}.$$

Bildung des Supremums über alle x liefert $\|\alpha+\beta\|_{\mathrm{op}} \leq \|\alpha\|_{\mathrm{op}} + \|\beta\|_{\mathrm{op}}$, so dass insbesondere $\|\alpha+\beta\|_{\mathrm{op}} < \infty$ und somit $\alpha+\beta \in \mathcal{L}(E,F)$.

Positive Homogenität: Sei $t \in \mathbb{R}$. Ist $t=0$, so ist $\|t\alpha\|_{\mathrm{op}} = \|0\|_{\mathrm{op}} = 0 = |t|\,\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \leq |t|\,\|\alpha\|_{\mathrm{op}}$. Ist $t \neq 0$, so ist

$$\|(t\alpha)(x)\|_F = |t|\,\|\alpha(x)\|_F$$

für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq 1$. Da Multiplikation mit $|t| > 0$ ein Ordnungs-Isomorphismus von $(\mathbb{R}, \leq)$ ist, folgt

$$\|t\alpha\|_{\mathrm{op}} = \sup\{|t|\,\|\alpha(x)\|_F \colon x \in \overline{B}_1^E(0)\} = |t|\,\sup\{\|\alpha(x)\| \colon x \in \overline{B}_1^E(0)\} = |t|\,\|\alpha\|_{\mathrm{op}}.$$

Insbesondere ist $\|t\alpha\|_{\mathrm{op}} < \infty$, also $t\alpha \in \mathcal{L}(E,F)$. Nach dem Vorigen ist $\mathcal{L}(E,F)$ ein Untervektorraum von F^E und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ ist subadditiv und positiv homogen.

Definitheit: Ist $\alpha \in \mathcal{L}(E,F)$ mit $\alpha \neq 0$, so ist $\alpha(x) \neq 0$ für ein $x \in E$. Dann ist $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \geq \|\alpha(\frac{1}{\|x\|_E} x)\|_F = \frac{1}{\|x\|_E}\|\alpha(x)\|_F > 0$. □

10 Die Matrix-Exponentialfunktion

In Definition 9.8 haben wir bereits

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

kennen gelernt für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und allgemeiner für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. In diesem Kapitel erläutern wir, wie sich e^A im Prinzip immer explizit berechnen lässt. Allgemeiner berechnen wir

$$e^{tA}$$

für $t \in \mathbb{R}$ (was $e^{tA} = e^A$ ergibt im Spezialfall $t = 1$), weil in vielen Anwendungen tatsächlich e^{tA} benötigt wird und die t-Abhängigkeit dann von Interesse sein kann (zum Beispiel, ob $e^{tA} \to \mathbf{0}_n$ für $t \to \infty$).

Die Abbildung

$$\exp\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$$

(und die entsprechende Abbildung $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$) nennt man die *Matrix-Exponentialfunktion.*

Die folgenden elementaren Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion sind ganz wesentlich.

Satz 10.1 *Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt:*

(a) *Für die $n \times n$-Nullmatrix $\mathbf{0}_n$ ist $e^{\mathbf{0}_n} = \mathbf{1}_n$ die $n \times n$-Einheitsmatrix.*

(b) *(Diagonalmatrizen). Für all $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^{\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

(c) *(Block-Diagonalmatrizen). Ist $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$ eine Blockdiagonalmatrix, wobei $n = n_1 + \cdots + n_r$ und $A_j \in \mathbb{C}^{n_j\times n_j}$ für $j \in \{1, \ldots, r\}$, so ist*

$$e^{\operatorname{diag}(A_1,\ldots,A_r)} = \operatorname{diag}(e^{A_1}, \ldots, e^{A_r}).$$

(d) *Ist $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, so gilt $e^{TBT^{-1}} = Te^BT^{-1}$.*

(e) *Vertauschen die Matrizen A und B (d.h. gilt $AB = BA$), so ist $e^{A+B} = e^Ae^B$.*

(f) *Für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *ist* $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.

(g) *Es ist* e^A *eine invertierbare Matrix, mit* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(h) *Ist* A *nilpotent mit* $A^m = \mathbf{0}$, *so ist* $e^A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A^k$.

Bemerkung 10.2 Satz 10.1 ermöglicht uns (zumindest im Prinzip), für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$e^{tA}$$

explizit zu berechnen, wie folgt: Nach dem Satz über die Jordansche Normalform aus der Linearen Algebra 2 existiert eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in Jordanscher Normalform derart, dass

$$A = TBT^{-1}$$

mit einer invertierbaren Matrix $T \in C^{n\times n}$. Es ist also B eine Blockdiagonalmatrix

$$B = \operatorname{diag}(J_1, \dots, J_r)$$

mit gewissen Jordan-Blöcken $J_1, \dots, J_r$. Dann ist

$$tA = T(tB)T^{-1}$$

mit $tB = \operatorname{diag}(tJ_1, \dots, tJ_r)$ und nach Satz 10.1 (d) und (c) folglich

$$e^{tA} = Te^{tB}T^{-1} = T \operatorname{diag}(tJ_1, \dots, tJ_r)T^{-1}.$$

Wir müssen also nur noch e^{tJ} berechnen können für einen Jordan-Block $J \in \mathbb{C}^{m\times m}$ der Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{1} + N$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

In den Potenzen N^k rutscht die Nebendiagonale mit Einsen in jedem Schritt eins weiter in die rechte obere Ecke; ist etwa $m = 4$, so ist

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = \mathbf{0}$$

und somit

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für allgemeines $m \in \mathbb{N}$ ist analog

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} t^k N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \cdots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{m-2}/(m-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix $t\lambda\mathbf{1}$ (als Vielfaches der Einheitsmatrix) mit tN vertauscht, folgt mit Satz 10.1 (b) und (e) weiter

$$e^{tJ} = e^{t\lambda\mathbf{1}+tN} = e^{t\lambda\mathbf{1}} e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 & \cdots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{m-2}/(m-2)! \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Jordanschen Normalform können wir e^{tA} also berechnen (und insbesondere e^A), oder jedenfalls im Prinzip – da wir die Transformationsmatrix T und die Jordansche Normalform B von A natürlich nicht immer explizit kennen (dies erfordert ja Kenntnis der Eigenwerte und somit Kenntnis der Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, eines Polynoms $n$ten Grades!)

Beweis von Satz 10.1. (a) Da $(\mathbf{0}_n)^k = \mathbf{0}_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ist $e^{\mathbf{0}_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{0}_n)^k = \frac{1}{0!}(\mathbf{0}_n)^0_n = \mathbf{1}_n$.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$, somit

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\lambda_n^k\right).$$

Für $N \to \infty$ folgt die Formel aus (b).

(c) Wird analog bewiesen; man ersetze $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ durch die Diagonalblöcke $A_1, \ldots, A_r$ im Beweis von (b).

(d) Für $N \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \underbrace{(TBT^{-1})^k}_{=TB^kT^{-1}} = T\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) T^{-1}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Te^BT^{-1} &= T\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) T^{-1} = \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k\right) T^{-1} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (TBT^{-1})^k = e^{TBT^{-1}}. \end{aligned}$$

(e) Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$ sind absolut konvergent. Da die Matrixmultiplikation

$$\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$$

bilinear ist, können wir die Cauchysche Produktformel anwenden (in der Fassung von Satz 9.13). Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j}$$

ist daher absolut konvergent und es ist

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = e^{A+B},$$

da

$$c_k = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}A^jB^{k-j} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}A^jB^{k-j} = \frac{1}{k!}(A+B)^k$$

unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes. Dessen Beweis aus der Analysis 1 für den Fall von Zahlen bleibt hier gültig, da wir mit einer einfachen Induktion zeigen können, dass

$$BA^k = A^kB$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(f) Da die Matrizen tA und sA miteinander vertauschen, gilt nach (e) $e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA}e^{sA}$.

(g) Da A und $-A$ vertauschen, gilt nach (e) und (a) $\mathbf{1}_n = e^{\mathbf{0}_n} = e^{A+(-A)} = e^Ae^{-A}$. Also ist e^A invertierbar mit Inverser e^{-A}.

(h) Ist $A^m = \mathbf{0}_n$, so ist auch $A^k = \mathbf{0}_n$ für alle $k \geq m$ und folglich $e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}A^k$. $\square$

Die folgende Beobachtung wurde in der Vorlesung übersprungen.

Satz 10.3 *Die Matrix-Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $A \mapsto e^A$ *ist stetig.*

Beweis. Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die zugehörige Operatornorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $r > 0$ die Funktion exp auf der offenen Kugel

$$B := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n}\colon \|A\|_{\mathrm{op}} < r\}$$

stetig ist, denn jede Matrix ist in einer solchen Kugel enthalten. Für $m \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir nun die Abbildung

$$f_m\colon B \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad A \mapsto \frac{1}{m!}A^m.$$

Dann ist f_m stetig und beschränkt mit

$$\|f_m(A)\|_{\mathrm{op}} = \frac{1}{m!}\|A^m\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{m!}\|A\|_{\mathrm{op}}^m \leq \frac{r^m}{m!}$$

für alle $A \in B$, so dass also[15]

$$\|f_m\|_\infty := \sup\{\|f_m(A)\|_{\mathrm{op}}\colon A \in B\} \leq \frac{r^m}{m!}.$$

[15]Statt der Ungleichung gilt sogar Gleichheit, da für jedes $t \in [0, r[$ die Matrix $A = t\mathbf{1}_n$ in B enthalten ist und $\|f_m(A)\|_{\mathrm{op}} = \frac{1}{m!}t^m\|\mathbf{1}_n\|_{\mathrm{op}} = \frac{t^m}{m!}$, was für $t \to r$ gegen $\frac{r^m}{m!}$ strebt.

Wegen
$$\sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_\infty \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m}{m!} = e^r < \infty$$
ist auch $\sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_\infty < \infty$. Nach Satz 8.14 und Bemerkung 8.16 konvergiert die Funktionenfolge $(\sum_{k=0}^{m} f_k)_{m\in\mathbb{N}_0}$ für $m \to \infty$ gleichmäßig gegen $\exp|_B$ und $\exp|_B$ ist stetig. $\square$

Bemerkung 10.4 Die Matrix-Exponentialfunktion wird uns im weiteren Verlauf der Vorlesung wieder begegnen. In Satz 15.17 werden wir sehen, dass
$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$
Dies ermöglicht uns schließlich in Satz 27.18, Lösungen gewisser Systeme von Differentialgleichungen in sehr einfacher Form mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion anzugeben.

11 Topologien und Stetigkeit

Für $n \geq 2$ gbt es auf $\mathbb{R}^n$ viele verschiedene Normen, wie wir gesehen haben; jedoch ergibt jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ die gleiche Menge

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq \mathbb{R}^n \colon (\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x) \subseteq V\}$$

von offenen Mengen (siehe Lemma 7.18). Für viele interessante Sachverhalte ist die gewählte Norm $\|\cdot\|$ (oder zugehörige Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$) irrelevant und diese lassen sich allein unter Benutzung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O})$ diskutieren. Dies öffnet den Blickwinkel für Situationen, in denen vielleicht keine Metrik verfügbar oder naheliegend ist, aber dennoch ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen V einer Menge X. Wir erinnern an Eigenschaften der Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen eines metrischen Raums (X,d), wie in Satz C.7:

11.1 (O1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.

(O2) Für jede Familie $(V_j)_{j\in J}$ von Mengen $V_j \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{j\in J} V_j \in \mathcal{O}$.

(O3) Für alle $V_1 \in \mathcal{O}$ und $V_2 \in \mathcal{O}$ ist $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$.

Definition 11.2 Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge (die Menge aller Teilmengen von X). Eine Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X wird eine *Topologie* auf X genannt, wenn die Bedingungen (O1), (O2) und (O3) aus 11.1 erfüllt sind. Ist X eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X, so nennt man das Paar $(X, \mathcal{O})$ einen *topologischen Raum.*

Definition 11.3 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(a) Wir nennen eine Teilmenge $V \subseteq X$ *offen*, wenn $V \in \mathcal{O}$.

(b) Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *offene Umgebung* eines Punkts $x \in X$, wenn V offen ist und $x \in V$.

(c) Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heißt *Umgebung* eines Punkts $x \in X$, wenn eine offene Umgebung V von x existiert mit $V \subseteq W$.

(d) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Jede offene Umgebung W eine Punkts x ist auch eine Umgebung von x (man nehme oben $V := W$).

Bemerkung 11.4 Mit den de Morganschen Regeln folgen aus (O1)–(O3) die folgenden Eigenschaften von abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$:

(a) $\emptyset$ und X sind abgeschlossene Mengen;

(b) Für jede Familie $(A_j)_{j\in J}$ von abgeschlossenen Mengen mit $J \neq \emptyset$ ist $\bigcap_{j\in J} A_j$ abgeschlossen.

(c) Sind A_1 und A_2 abgeschlossene Teilmengen von X, so ist $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

Lemma 11.5 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(a) *M ist offen;*

(b) *M ist eine Umgebung von jedem $x \in M$.*

Beweis. (a)⇒(b): Ist M offen, so ist M eine offene Umgebung von jedem $x \in M$.

(b)⇒(a): Ist M eine Umgebung von jedem $x \in M$, so existiert eine offene Umgebung V_x von x mit $V_x \subseteq M$. Dann ist

$$M = \bigcup_{x\in M} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in M} V_x \subseteq M,$$

also $M = \bigcup_{x\in M} V_x$ offen als Vereinigung offener Mengen. □

Definition 11.6 Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *stetig* an einer Stelle $x \in X$, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ in Y das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X ist.

(b) f heißt *stetig*, wenn f an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist.

Wegen Lemma C.13 ist im Falle metrischer Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) die gerade gegebene Definition von Stetigkeit an einer Stelle x (und somit auch die Definition von Stetigkeit) äquivalent zur bei metrischen Räumen üblichen Definition.

Analog zu Satz C.14 haben wir:

Satz 11.7 *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Für eine Funktion $f\colon X \to Y$ sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig, also stetig an jeder Stelle $x \in X$;*

(b) *Für jede offene Teilmenge V von Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von X;*

(c) *Für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y ist das Urbild $f^{-1}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Sei $V \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(V)$. Da V eine Umgebung von $f(x)$ ist, ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Nach Lemma 11.5 ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)$\Rightarrow$(c): Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus A$ eine offene Teilmenge von Y, somit nach (b)

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

eine offene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(c)$\Rightarrow$(b): Ist V eine offene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y, somit nach (c)

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)$\Rightarrow$(a): Ist $x \in X$ und $W \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es eine offene Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $V \subseteq W$. Nach (b) ist $f^{-1}(V)$ offen. Da $x \in f^{-1}(V)$, ist $f^{-1}(V)$ eine offene x-Umgebung und somit auch $f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X. Also ist f an der Stelle x stetig. □

Wir können den Beweis von Satz C.15 wörtlich abschreiben und erhalten:

Satz 11.8 *Seien X, Y und Z topologische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Ist f stetig an der Stelle x und g stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition*

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad y \mapsto g(f(y))$$

stetig an der Stelle x. Insbesondere: Sind f und g stetig, so auch $g \circ f$. □

Definition 11.9 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *Hausdorffsch*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine Umgebung P von x und eine Umgebung Q von y existieren mit $P \cap Q = \emptyset$.

Da jede Umgebung eine offene enthält, kann man P und Q in der vorigen Definition stets als offene Umgebungen wählen.

Beispiel 11.10 Es sei (X, d) eine metrischer Raum und

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq X \colon (\forall x \in X)(\exists \varepsilon > 0)\ B_\varepsilon(x) \subseteq V\}$$

die zugrunde liegende Topologie. Dann ist $(X, \mathcal{O})$ Hausdorffsch.

[Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so ist $r := d(x, y) > 0$. Dann ist $P := B_{r/2}(x)$ eine Umgebung von x und $Q := B_{r/2}(y)$ eine Umgebung von y. Beide sind disjunkt, denn wäre $z \in P \cap Q$, so bekämen wir mit der Dreiecksungleichung den Widerspruch

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r/2 + r/2 = r = d(x, y).\,]$$

Beispiel 11.11 Ist X eine Menge, so ist $\mathcal{O} := \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, genannt die *indiskrete Topologie*. Hat X mehr als ein Element, so ist $(X, \mathcal{O})$ nicht Hausdorffsch. Seien nämlich $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Ist P eine offene Umgebung von x in X und Q eine offene Umgebung von y, so ist $P = Q = X$ (da dies die einzige nicht-leere offene Teilmenge von X ist) und somit $P \cap Q = X \neq \emptyset$.

In der Analysis arbeiten wir meist nur mit Hausdorffräumen (also Hausdorffschen topologischen Räumen). In diesen sind Grenzwerte von Folgen eindeutig.

Definition 11.12 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_n \in X$. Wir sagen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen ein $x \in X$, wenn für jede Umgebung V von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$(\forall n \geq N)\ x_n \in V.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent*, wenn sie gegen ein $x \in X$ konvergiert.

In metrischen Räumen ist die gerade gegebene Konvergenzdefinition äquivalent zur üblichen, siehe Lemma C.10.

Lemma 11.13 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffscher topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$, so ist $x = y$.*

Beweis. Würde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gleichzeitig gegen x und ein Element $y \neq x$ konvergieren, so wählen wir disjunkte Umgebungen P von x und Q von y. Da $x_n \to x$, exstiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N_1)\; x_n \in P.$$

Da $x_n \to y$, existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N_2)\; x_n \in Q.$$

Setzen wir $n := \max\{N_1, N_2\}$, so ist also $x_n \in P$ und $x_n \in Q$, folglich $P \cap Q \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme, dass P und Q disjunkt sind. □

Bemerkung 11.14 Da der Grenzwert x einer konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Hausdorffraum eindeutig festgelegt ist, können wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n := x$$

setzen.

In allgemeinen topologischen Räumen sind Folgen und Konvergenz von Folgen weit weniger nützlich als in metrischen Räumen. Zum Beispiel sind abgeschlossene Teilmengen zwar stets folgenabgeschlossen in dem Sinne, dass sie sie die im nächsten Satz beschriebene Eigenschaft haben. In geeigneten topologischen Räumen existieren aber folgenabgeschlossene Teilmengen, die nicht abgeschlossen sind. In metrischen Räumen kann diese Problematik nicht auftreten (siehe Satz C.11). Auch kann Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen nicht mehr mittels Folgen nachgerechnet werden.

Satz 11.15 *Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ abgeschlossen, so gilt für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A und jedes $x \in X$ mit $a_n \to x$, dass $x \in A$.*

Beweis. Sei A abgeschlossen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $a_n \in A$, welche in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wäre $x \notin A$, so wäre $W := X \setminus A$ eine offene Menge mit $x \in W$, also eine Umgebung von x. Da $a_n \to x$, gäbe es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \in W$ für alle $n \geq N$. Insbesondere wäre $a_N \in W = X \setminus A$, im Widerspruch zu $a_N \in A$. Also muss $x \in A$ sein. □

12 Beispiele: Induzierte Topologie, Produkttopologie

Zwei Arten von Topologien begegnet man wieder und wieder, auch beim Umgang mit Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Relativ offene Mengen und induzierte Topologie

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist es naheliegend, auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ die Einschränkung

$$d_Y := d|_{Y \times Y} \colon Y \times Y \to [0, \infty[, \; d_Y(x, y) := d(x, y) \text{ für } x, y \in Y$$

als Metrik zu verwenden, die sogenannte *induzierte Metrik*.[16] Der folgende Satz beschreibt die offenen Mengen des metrischen Raums (Y, d_Y) und führt uns zum Begriff der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O})$.

Satz 12.1 *Ist (X, d) ein metrischer Raum und d_Y die induzierte Metrik auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$, so ist für eine Teilmenge $V \subseteq Y$ äquivalent:*

(a) *V ist offen im metrischen Raum (Y, d_Y);*

(b) *Es existiert eine offene Teilmenge U in (X, d) mit $V = U \cap Y$.*

Beweis. Gegeben $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei $B^X_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$. Gegeben $x \in Y$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$B^Y_\varepsilon(x) := \{y \in Y \colon d_Y(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in Y \colon d(x, y) < \varepsilon\};$$

dann ist also

$$B^Y_\varepsilon(x) = B^X_\varepsilon(x) \cap Y.$$

(a)$\Rightarrow$(b): Ist V offen in (Y, d_Y), so existiert für jedes $x \in V$ ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B^Y_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq V$. Somit ist

$$V = \bigcup_{x \in V} B^Y_{\varepsilon(x)}(x) = \bigcup_{x \in V} (B^X_{\varepsilon(x)}(x) \cap Y) = U \cap Y$$

[16] Dies ist eine Metrik, denn sind $x, y, z \in Y$, so gilt $0 = d_Y(x, y) = d(x, y)$ genau dann, wenn $x = y$. Weiter gilt $d_Y(y, x) = d(y, x) = d(x, y) = d_Y(x, y)$. Schließlich ist $d_Y(x, y) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d_Y(x, z) + d_Y(z, y)$.

mit der offenen Teilmenge $U := \bigcup_{x \in V} B^X_{\varepsilon(x)}(x)$ von (X, d).

(b)⇒(a): Sei $V \subseteq Y$ eine Teilmenge der Form $V = U \cap Y$ mit einer offenen Teilmenge U von (X, d). Für jedes $x \in V$ ist $x \in U$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B^X_\varepsilon(x) \subseteq U$. Es folgt

$$B^Y_\varepsilon(x) = B^X_\varepsilon(x) \cap Y \subseteq U \cap Y = V;$$

da $x \in V$ beliebig war, ist V offen in (Y, d_Y). □

Definition 12.2 Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so heißt

$$\mathcal{O}_Y := \{V \subseteq Y : (\exists U \in \mathcal{O})\, V = U \cap Y\}$$

die von $\mathcal{O}$ auf Y *induzierte Topologie* (oder auch: die *Spurtopologie*).[17] Die offenen Mengen $V \subseteq Y$ im topologischen Raum $(Y, \mathcal{O}_Y)$ nennt man zur Verdeutlichung auch *relativ offene Mengen* (später aber meist einfach: "offene Teilmengen von Y"). Wir versehen Teilmengen $Y \subseteq X$ immer mit der induzierten Topologie (wenn nichts anderes gesagt wird). Abgeschlossene Teilmengen von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ werden *relativ abgeschlossen* genannt (oder kurz: abgeschlossen *in* Y).

Bemerkung 12.3 Ist (X, d) ein metrischer Raum, so versehen wir eine Teilmenge $Y \subseteq X$ immer mit der induzierten Metrik d_Y (wenn nichts anderes gesagt wird). Sei $\mathcal{O}$ die Topologie des metrischen Raums (X, d). Nach Satz 12.1 ist die Topologie des metrischen Raums (Y, d_Y) genau die von $(X, \mathcal{O})$ auf Y induzierte Topologie $\mathcal{O}_Y$.

Satz 12.4 *Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Versehen wir eine Teilmenge $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie $\mathcal{O}_Y$, so gilt:*

(a) *Die Inklusion $j \colon Y \to X$, $x \mapsto x$ ist stetig als Abbildung von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ nach $(X, \mathcal{O})$.*

---

[17] $\mathcal{O}_Y$ ist eine Topologie auf Y: Es gilt $Y = X \cap Y \in \mathcal{O}_Y$, $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_Y$, so gibt es $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ mit $V_1 = U_1 \cap Y$ und $V_2 = U_2 \cap Y$. Da $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ ist, folgt $V_1 \cap V_2 = U_1 \cap U_2 \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Ist schließlich $(V_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $V_j \in \mathcal{O}_Y$, so existiert für jedes $j \in J$ eine Menge $U_j \in \mathcal{O}$ mit $V_j = U_j \cap Y$. Dann ist $U := \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$ und somit $\bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J}(U_j \cap Y) = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$.

(b) *Ist* $(Z, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung* $f\colon Z \to Y$ *genau dann stetig nach* $(Y, \mathcal{O}_Y)$*, wenn* $j \circ f$ *stetig nach* $(X, \mathcal{O})$ *ist.*

(c) *Eine Teilmenge* $B \subseteq Y$ *ist genau dann relativ abgeschlossen, wenn eine abgeschlossene Teilmenge* A *von* X *existiert mit* $B = A \cap Y$.

(d) *Ist* $(X, \mathcal{O})$ *Hausdorffsch, so ist auch* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *Hausdorffsch.*

(e) *Ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* Y *und* $x \in Y$*, so gilt* $x_n \to x$ *für* $n \to \infty$ *in* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *genau dann, wenn* $x_n \to x$ *in* $(X, \mathcal{O})$.

Beweis. (a) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist

$$j^{-1}(U) = \{x \in Y : x = j(x) \in U\} = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y,$$

somit f stetig nach Satz 11.7(b).

(b) Ist f stetig, so auch $j \circ f$ als Komposition stetiger Abbildungen (nach (a) und Satz 11.8). Ist $j \circ f$ stetig und $V \in \mathcal{O}_Y$ offen in Y, so existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $V = U \cap Y = j^{-1}(U)$. Dann ist

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(j^{-1}(U)) = (j \circ f)^{-1}(U)$$

offen in $(Z, \mathcal{T})$ wegen der Stetigkeit von $j \circ f$. Also ist f stetig.

(c) Ist $B \subseteq Y$ relativ abgeschlossen, so ist $Y \setminus B$ relativ offen, es existiert also eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $Y \setminus B = U \cap Y$. Dann ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen in X und $A \cap Y = (X \cap Y) \setminus (U \cap Y) = Y \setminus (Y \setminus B) = B$.

Existiert umgekehrt eine abgeschlossene Teilmenge A von X mit $B = A \cap Y$, so ist $X \setminus A$ offen, somit $Y \setminus B = Y \setminus (A \cap Y) = (X \setminus A) \cap Y$ relativ offen, also B relativ abgeschlossen in Y.

(d) Sind $x \neq y$ in Y, so gibt es disjunkte offene Teilmengen U_1 und U_2 von X mit $x \in U_1$ und $y \in U_2$. Dann sind $V_1 := U_1 \cap Y$ und $V_2 := U_2 \cap Y$ relativ offene Mengen mit $x \in V_1$, $y \in V_2$ und $V_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(e) Gilt $x_n \to x$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und ist $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x in X, so ist $U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in U \cap Y$ für alle $n \geq N$ und somit $x_n \in U$, woraus $x_n \to x$ in $(X, \mathcal{O})$ folgt. Gilt umgekehrt $x_n \to x$ in $(X, \mathcal{O})$ und ist $V \in \mathcal{O}_Y$ mit $x \in V$, so existiert ein $U \in \mathcal{O}$ mit $V = U \cap Y$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also (da $x_n \in Y$) $x_n \in U \cap Y = V$. Ergo gilt $x_n \to x$ in $(Y, \mathcal{O}_Y)$. □

Bemerkung 12.5 In der Situation des vorigen Satzes gilt:

(a) Für jede stetige Funktion $f\colon X \to Z$ in einen topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ ist auch die Einschränkung $f|_Y$ stetig, denn es ist $f|_Y = f \circ j$ mit der stetigen Inklusion $j\colon Y \to X$ aus Satz 12.4(a).

(b) Für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ und jede stetige Abbildung $f\colon Z \to X$ mit $f(Z) \subseteq Y$ ist die Ko-Einschränkung $f|^Y\colon Z \to Y$, $x \mapsto f(x)$ stetig nach Satz 12.4(b), denn $j \circ f|^Y = f$ ist stetig.

(c) Ist U eine offene Teilmenge von $(X, \mathcal{O})$ mit $U \subseteq Y$, so ist $U = U \cap Y$ auch relativ offen in Y.

(d) Ist B eine abgeschlossene Teilmenge von $(X, \mathcal{O})$ mit $B \subseteq Y$, so ist $B = B \cap Y$ auch relativ abgeschlossen in Y.

(e) Eine Teilmenge Y von X ist genau dann offen in $(X, \mathcal{O})$, wenn gilt: Für jede Teilmenge V von Y sind Offenheit von V in X und relative Offenheit von V in Y äquivalent.

[Ist Y offen, so ist $U \cap Y$ offen in X für jede offene Teilmenge U von X. Ist umgekehrt $U \cap Y$ offen in X für jede offene Teilmenge U von X, so gilt dies insbesondere für $U := X$; somit ist $Y = X \cap Y$ offen in X.]

(f) Eine Teilmenge Y von X ist genau dann abgeschlossen in $(X, \mathcal{O})$, wenn gilt: Für jede Teilmenge A von Y ist Abgeschlossenheit von A in $(X, \mathcal{O})$ äquivalent zur relativen Abgeschlossenheit von A in Y.

[Man ersetze das Wort "offen" durch "abgeschlossen" im Argument für (e)].

Satz 12.6 *Ist Y eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d), so gilt:*

(a) *Ist Y bezüglich der induzierten Metrik d_Y vollständig, so ist Y in X abgeschlossen.*

(b) *Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist Y genau dann abgeschlossen in X, wenn der metrische Raum (Y, d_Y) vollständig ist.*

Insbesondere ist jede abgeschlossene Teilmenge A eines Banachraums $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, insbesondere also jede abgeschlossene Kugel $\overline{B}_r^E(x)$ in E.

Beweis von Satz 12.6. (a) Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y, die in X gegen ein $x \in X$ konvergiert, so ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d) und somit auch in (Y, d_Y). Da (Y, d_Y) vollständig ist, existiert ein $y \in Y$ derart, dass $y_n \to y$

in (Y, d_Y). Dann gilt auch $y_n \to y$ in (X, d_X) und somit $x = y \in Y$ wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten von Folgen. Also ist $x \in Y$ und somit Y abgeschlossen in X.

(b) Ist Y abgeschlossen in X und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y, so ist diese auch eine Cauchyfolge in X und somit in (X, d) konvergent gegen ein $x \in X$. Da Y in X abgeschlossen ist, muss $x \in Y$ sein und es gilt dann auch $y_n \to x$ in (Y, d_Y). Also konvergiert in (Y, d_Y) jede Cauchyfolge und somit ist (Y, d_Y) vollständig. $\square$.

Offene Kästchen und Produkttopologie

Wir untersuchen die offenen Mengen in einem Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ metrischer Räume (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) bezüglich der Maximummetrik und werden so auf den Begriff der *Produkttopologie* geführt. Insbesondere trägt $\mathbb{R}^n$ bezüglich jeder Norm die Produkttopologie von $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

An der Tafel haben wir nur den Fall $n = 2$ von zwei Faktoren behandelt (und Satz 12.11 nur für metrische Räume bewiesen).

Satz 12.7 *Es seien (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) metrische Räume und $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, versehen mit der durch*

$$d_\infty(x, y) := \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in X gegebenen Maximummetrik. Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ sind dann äquivalent:

(a) *U ist offen im metrischen Raum (X, d_∞);*

(b) *Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ existieren für $j \in \{1, \ldots, n\}$ offene Teilmengen $V_j \subseteq X_j$ in (X_j, d_j) derart, dass*

$$x \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Insbesondere ist $V_1 \times \cdots \times V_n$ offen in (X, d_∞), für alle offenen Teilmengen V_j von (X_j, d_j) für $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ und $\varepsilon > 0$. Für $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ gilt

$$\max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} = d_\infty(x, y) < \varepsilon$$

genau dann, wenn $d_j(x_j, y_j) < \varepsilon$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für die offene ε-Kugel um x in (X, d_∞) gilt also

$$B_\varepsilon^X(x) = \{y \in X : d_\infty(x, y) < \varepsilon\} = B_\varepsilon^{X_1}(x_1) \times \cdots \times B_\varepsilon^{X_n}(x_n), \qquad (60)$$

sie ist das kartesische Produkt der ε-Kugeln um x_j in (X_j, d_j).

(a)$\Rightarrow$(b): Ist U offen in (X, d_∞), so gibt es zu $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^X(x) \subseteq U$. Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann $V_j := B_\varepsilon^{X_j}(x_j)$ offen in (X_j, d_j) und nach (60) gilt

$$V_1 \times \cdots \times V_n = B_\varepsilon^X(x) \subseteq U.$$

Da weiter $x \in V_1 \times \cdots \times V_n$, folgt (b).

(b)$\Rightarrow$(a): Sei die Bedingung aus (b) erfüllt. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ existieren dann offene Mengen $V_1 \subseteq X_1, \ldots, V_n \subseteq X_n$ mit

$$x \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann $x_j \in V_j$; da V_j in X_j offen ist, gibt es also ein $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}^{X_j}(x_j) \subseteq V_j$. Setzen wir

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\},$$

so ist $B_\varepsilon^{X_j}(x_j) \subseteq V_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, somit unter Benutzung von (60)

$$B_\varepsilon^X(x) = B_\varepsilon^{X_1}(x_1) \times \cdots \times B_\varepsilon^{X_n}(x_n) \subseteq V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Da $x \in U$ beliebig war, ist U offen.

Die letzte Aussage gilt, da wir im Falle $U := V_1 \times \cdots \times V_n$ in (b) unabhängig von $x \in U$ immer die gegebenen offenen Mengen $V_1, \ldots, V_n$ benutzen können; es ist $V_1 \times \cdots \times V_n = U \subseteq U$. □

Nach dem vorigen Satz definiert die Maximummetrik auf einem Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ metrischer Räume die folgende Produkttopologie:

Definition 12.8 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ topologische Räume und $\mathcal{O}$ die Menge aller Teilmengen

$$U \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$$

mit folgender Eigenschaft: Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ existieren offene Umgebungen V_k von x_k in X_k für $k \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Dann ist $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$ (wie wir gleich nachprüfen), genannt die *Produkttopologie.* Per Definition ist jedes Produkt

$$V_1 \times \cdots \times V_n$$

aus offenen Mengen $V_k \subseteq X_k$ in $\mathcal{O}$ (also offen in $X_1 \times \cdots \times X_n$); solche Produkte nennt man auch "offene Kästchen." Weiter gehört per Definition eine Teilmenge $U \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ genau dann zu $\mathcal{O}$ (ist also offen in $X_1 \times \cdots \times X_n$), wenn sie eine Vereinigung offener Kästchen ist.

Wir versehen Produkte topologischer Räume immer mit der Produkttopologie (wenn nichts anderes gesagt wird).

$\mathcal{O}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$: Da X_k offen in X_k ist, ist $X_1 \times \cdots \times X_n$ ein offenes Kästchen, also in $\mathcal{O}$. Weiter ist $\emptyset$ in $\mathcal{O}$, denn es gibt kein x, für das man etwas nachprüfen müsste.

Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen $U_j \in \mathcal{O}$, so ist jedes U_j eine Vereinigung offener Kästchen, also auch $\bigcup_{j \in J} U_j$. Somit ist $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$.

Sind schließlich $V, W \in \mathcal{O}$, so ist $V \cap W \in \mathcal{O}$: Ist nämlich $x \in V \cap W$, so gibt es offene Kästchen $V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq V$ und $W_1 \times \cdots \times W_n \subseteq W$, die x enthalten. Dann ist

$$(V_1 \cap W_1) \times \cdots \times (V_n \cap W_n)$$

ein offenes Kästchen, das x enthält und

$$(V_1 \cap W_1) \times \cdots \times (V_n \cap W_n) = (V_1 \times \cdots \times V_n) \cap (W_1 \times \cdots \times W_n) \subseteq V \cap W.$$

Beispiel 12.9 Die Topologie auf $\mathbb{R}^n$ kann über die zur Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ gehörige Metrik $d_\infty \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$,

$$d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

beschrieben werden. Diese ist die Maximummetrik, wenn wir jeden der n Faktoren $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $d(x, y) := |x - y|$ versehen, die die Topologie auf $\mathbb{R}$ definiert. Nach Satz 12.7 ist die durch d_∞ definierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ die Produkttopologie.

Der folgende Satz verallgemeinert insbesondere einige Sachverhalte, die wir für Produkte metrischer Räume mit der Maximummetrik schon kennen (siehe Satz 7.29).

Satz 12.10 *Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{O}_n)$ topologische Räume; wir versehen $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$. Dann gilt:*

(a) *Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Projektion*

$$\mathrm{pr}_j \colon X \to X_j, \ \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$$

auf die $j$te Komponente stetig.

(b) *Für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ ist eine Abbildung*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \colon Z \to X, \quad x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

genau dann stetig an einer Stelle $z_0 \in Z$, wenn jede der Abbildungen $f_j \colon Z \to X_j$ an der Stelle z_0 stetig ist. Insbesondere ist f genau dann stetig, wenn jede der Abbildungen $f_1, \ldots, f_n$ stetig ist.

(c) *Ist jeder der topologischen Räume $(X_1, \mathcal{O}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{O}_n)$ Hausdorffsch, so ist auch $(X, \mathcal{O})$ Hausdorffsch.*

(d) *Eine Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ in $(X, \mathcal{O})$, wenn $\mathrm{pr}_j(x_m) \to y_j$ in $(X_j, \mathcal{O}_j)$ für $m \to \infty$, für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

(e) *Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $x_i \in X_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ ist die Abbildung*

$$X_j \to X, \ \ t \mapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n) \tag{61}$$

stetig. Weiter ist für jede stetige Abbildung $f \colon X \to Z$ von $(X, \mathcal{O})$ in einen topologischen Raum $(Z, \mathcal{T})$ auch die "partielle Abbildung"

$$X_j \to Z, \quad t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

stetig.

Beweis. (a) Ist $V_j \subseteq X_j$ offen und setzen wir $V_i := X_i$ für $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, so ist

$$(\mathrm{pr}_j)^{-1}(V_j) = \{x \in X \colon \ \mathrm{pr}_j(x) \in V_j\} = V_1 \times \cdots \times V_n$$

ein offenes Kästchen, also offen. Somit ist pr_j stetig.

(b) Ist f an der Stelle z_0 stetig, so auch $f_j = \mathrm{pr}_j \circ f$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$, unter Benutzung von (a). Seien umgekehrt $f_1, \ldots, f_n$ an der Stelle

z_0 stetig und $U \subseteq X$ eine Umgebung von $f(z_0)$. Dann existieren offene Umgebungen V_j von $f_j(z_0)$ für $j \in \{1,\ldots,n\}$ derart, dass $V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U$. Dann ist

$$f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(V_1 \times \cdots \times V_n) = f_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(V_n)$$

eine Umgebung von z_0 in Z, somit f an der Stelle z_0 stetig.

(c) Sind $x = (x_1,\ldots,x_n)$ und $y = (y_1,\ldots,y_n)$ zwei verschiedene Elemente von X, so ist $x_k \neq y_k$ für ein $k \in \{1,\ldots,n\}$. Da X_k Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen V von x_k und W von y_k in X_k mit $V \cap W = \emptyset$. Dann sind die offenen Kästchen

$$X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times V \times X_{k+1} \times \cdots X_n$$

und

$$X_1 \times \cdots \times X_{k-1} \times W \times X_{k+1} \times \cdots X_n$$

offene Umgebungen von x bzw. y in X, deren Schnitt ebenfalls leer ist.

(d) Konvergiert x_m gegen y, so konvergiert für $j \in \{1,\ldots,n\}$ die Folge der $\mathrm{pr}_j(x_m)$ für $m \to \infty$ gegen $\mathrm{pr}_j(y) = y_j$, da pr_j nach (a) stetig ist. Konvergiere nun umgekehrt $x_{m,j} := \mathrm{pr}_j(x_m)$ gegen y_j in X_j für $m \to \infty$, für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$. Ist U eine Umgebung von $y = (y_1,\ldots,y_n)$ in X, so existieren offene Umgebungen V_j von y_j in X_j für $j \in \{1,\ldots,n\}$ derart, dass $V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U$. Für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$ existiert ein $N_j \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall m \geq N_j)\;\; x_{m,j} \in V_j.$$

Setzen wir $N := \max\{N_1,\ldots,N_n\}$, so gilt für alle $m \geq N$, dass $x_{m,j} \in V_j$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$ und somit

$$x_m = (x_{m,1},\ldots,x_{m,n}) \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq U.$$

Also gilt $x_m \to y$ für $m \to \infty$.

(e) Sei $\lambda\colon X_j \to X$ die Abbildung aus (61). Für $i \neq j$ ist $\mathrm{pr}_i \circ \lambda$ die konstante Abbildung $X_j \to X_i$, $t \mapsto x_i$ und somit stetig. Weiter ist $\mathrm{pr}_j \circ \lambda$ die identische Abbildung $\mathrm{id}_{X_j}\colon X_j \to X_j$ und somit stetig. Nach (b) ist also λ stetig und folglich auch die partielle Abbildung $f \circ \lambda$ (wenn $f\colon X \to Z$ stetig ist). $\square$

Satz 12.11 *Es seien $(X_1, \mathcal{O}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{O}_n)$ topologische Räume und $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ mit der Produkttopologie $\mathcal{O}$. Für $j \in \{1,\ldots,n\}$ sei $Y_j \subseteq X_n$ eine Teilmenge und $\mathcal{O}_{Y_j}$ die von $(X_j, \mathcal{O}_j)$ auf Y_j induzierte Topologie. Dann stimmen die folgenden Topologien auf $Y := Y_1 \times \cdots \times Y_n$ überein:*

(a) *Die Produkttopologie* $\mathcal{T}$ *auf* $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$, *betrachtet als Produkt der topologischen Räume* $(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1})$, ..., $(Y_n, \mathcal{O}_{Y_n})$;

(b) *Die von* $(X, \mathcal{O})$ *auf der Teilmenge* $Y \subseteq X$ *induzierte Topologie* $\mathcal{O}_Y$.

Beweis. Ist eine Teilmenge $V \subseteq Y$ offen in $(Y, \mathcal{T})$, so existieren zu $x \in V$ relativ offene Mengen $V_j \subseteq Y_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$x \in V_1 \times \cdots \times V_n \subseteq V.$$

Für jedes j gibt es eine offene Teilmenge $U_j \subseteq X_j$ mit $V_j = U_j \cap Y_j$. Dann ist $U_1 \times \cdots \times U_n$ offen in $(X, \mathcal{O})$ und

$$V_1 \times \cdots \times V_n = (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap Y$$

offen in $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Also ist V in $(Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Umgebung jedes Punkts aus V und somit offen.

Sei umgekehrt eine Teilmenge $V \subseteq Y$ offen in $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Dann existiert eine offene Menge $U \subseteq X$ derart, dass $V = U \cap Y$. Gegeben $x \in V$ ist $x \in U$, also gibt es offene Teilmengen $U_j \subseteq X_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass

$$x \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq U.$$

Dann ist $V_j := U_j \cap Y_j$ relativ offen in Y_j für $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{T}$. Wegen

$$V = U \cap Y \supseteq (U_1 \times \cdots \times U_n) \cap Y = V_1 \times \cdots \times V_n$$

ist V eine Umgebung von x in $(Y, \mathcal{T})$. Da x beliebig war, ist $V \in \mathcal{T}$. $\square$

13 Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge

Im Falle von Funktionen einer Variablen war es oft ausreichend, Funktionen auf recht einfachen Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu betrachten, den Intervallen. Typische Definitionsbereiche von Funktionen mehrerer Variablen können komplizierter sein. Dies motiviert, Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besser verstehen zu wollen. Beispielsweise haben die Randpunkte a und b eines Intervalls $[a, b]$ mitunter eine besondere Rolle gespielt. Somit wollen wir auch bei Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ von Randpunkten reden können.

Da dies keine zusätzlichen Schwierigkeiten verursacht, diskutieren wir alle Begriffe allgemeiner für Teilmengen metrischer (oder topologischer Räume).

Definition 13.1 Es sei X ein topologischer Raum (z.B. ein metrischer Raum, z.B. $\mathbb{R}^n$) und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) Das *Innere* M^0 von M ist definiert als

$$M^0 := \bigcup_{\substack{V \subseteq X \text{ offen} \\ \text{mit } V \subseteq M}} V,$$

die Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Teilmengen von X. Da Vereinigungen offener Mengen offen sind, ist M^0 offen. Also ist M^0 die *größte in M enthaltene offene Menge* (d.h. M^0 ist eine offene Menge, die in M enthalten ist; und es ist $V \subseteq M^0$ für jede offene Menge V mit $V \subseteq M$).

Manche Autoren schreiben auch $\operatorname{int}(M)$ statt M^0 (mit “int” wie englisch “interior”).

(b) Der *Abschluss* $\overline{M}$ von M ist definiert als

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abgeschlossen} \\ \text{mit } M \subseteq A}} A,$$

der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen A von X, welche A enthalten.[18] Da Durchschnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen

[18]Eine solche Menge A gibt es immer, nämlich $A = X$.

sind, ist $\overline{M}$ abgeschlossen. Also ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, welche M enthält.[19]

(c) Der *Rand ∂M von M* ist definiert als

$$\partial M := \overline{M} \setminus M^0.$$

Sind A und B disjunkte Mengen (also $A \cap B = \emptyset$), so nennt man $A \cup B$ auch eine *disjunkte Vereinigung* und schreibt

$$A \,\dot{\cup}\, B$$

statt $A \cup B$.

Bemerkung 13.2 (a) Da $\overline{M}$ und $X \setminus M^0$ abgeschlossene Teilmengen von X sind, ist auch

$$\partial M = \overline{M} \setminus M^0 = \overline{M} \cap (X \setminus M^0)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X.

(b) Per Definition ist $\partial M \subseteq \overline{M}$ und wegen $M^0 \subseteq M \subseteq \overline{M}$ weiter

$$\overline{M} = M^0 \cup (\overline{M} \setminus M^0) = M^0 \,\dot{\cup}\, (\overline{M} \setminus M^0),$$

also

$$\overline{M} = M^0 \,\dot{\cup}\, \partial M. \tag{62}$$

Die folgenden zwei Sätze helfen uns, Inneres, Abschluss und Rand besser zu verstehen und zu berechnen.

Satz 13.3 *Es sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Für jedes $x \in X$ gilt dann:*

(a) *Genau dann ist $x \in M^0$, wenn M eine x-Umgebung ist. Dies gilt genau dann, wenn in X eine offene x-Umgebung V existiert mit $V \subseteq M$.*

(b) *Genau dann ist $x \in \overline{M}$, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ für jede offene x-Umgebung V.*

(c) *Genau dann ist $x \in \partial M$, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ und $V \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ für jede offene x-Umgebung $V \subseteq X$.*

---

[19] D.h. $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge, die M enthält; und es ist $\overline{M} \subseteq A$ für jede abgeschlossene Menge A mit $M \subseteq A$.

Beweis. (a) Sei $U := \{x \in M \colon M \text{ ist Umgebung von } x \text{ in } X\}$. Da M^0 offen ist, ist M^0 eine Umgebung von jedem $x \in M^0$ (und es ist dann $x \in M^0 \subseteq M$). Somit $M^0 \subseteq U$. Umgekehrt ist aber U in M enthalten und wir zeigen, dass U offen ist; somit ist $U \subseteq M^0$ per Definition des Inneren und somit $U = M^0$. Sei nämlich $x \in U$. Per Definition von U ist dann M eine Umgebung von x, es gibt also eine offene Teilmenge W_x von X mit $x \in W_x \subseteq M$. Dann ist M eine Umgebung von jedem $y \in W_x$, also $y \in U$, also $W_x \subseteq U$. Somit ist $U = \bigcup_{x \in V} W_x$ offen als Vereinigung offener Mengen. Die zweite Aussage ist nur eine Umformulierung der ersten.

(b) Wir erinnern daran, dass die Aussage (nicht A) $\Leftrightarrow$ (nicht B) äquivalent ist zur Aussage $A \Leftrightarrow B$. Wir brauchen daher nur erstere zu zeigen. Sei $x \in X$. Existiert eine offene Umgebung V von x mit $V \cap M = \emptyset$, so ist $X \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von X mit $M \subseteq X \setminus V$, somit $\overline{M} \subseteq X \setminus V$, somit $x \notin \overline{M}$ (da $x \in V$). Ist umgekehrt $x \in X \setminus \overline{M} =: W$, so ist W eine offene Umgebung von x mit $W \cap M = \emptyset$.

(c) Ist $x \in \partial M$ und V eine offene x-Umgebung, so ist wegen $\partial M \subseteq \overline{M}$ nach (b)

$$V \cap M \neq \emptyset.$$

Wäre $V \cap (X \setminus M) = \emptyset$, so wäre $V \subseteq M$ und somit nach (a) $x \in M^0$, was $x \in \partial M = \overline{M} \setminus M^0$ widerspricht.

Im Rest des Beweises schreiben wir $A^c := X \setminus A$ für das Komplement einer Teilmenge $A \subseteq X$. Ist $x \notin \partial M = \overline{M} \cap (M^0)^c$, so ist

$$x \in (\partial M)^c = \overline{M}^c \cup ((M^0)^c)^c = \overline{M}^c \cup M^0$$

unter Benutzung der de Morganschen Regeln. Ist $x \in \overline{M}^c$, so ist $V := \overline{M}^c$ eine offene x-Umgebung mit $V \cap M \subseteq V \cap \overline{M} = \emptyset$. Ist $x \in M^0$, so ist $V := M^0$ eine offene x-Umgebung mit $V \subseteq M$, folglich also $V \cap M^c = \emptyset$. $\square$

Satz 13.4 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum mit offenen Kugeln $B_r(x)$ und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann gilt:*

(a) *M^0 ist die Menge aller $x \in M$, für welche ein $\varepsilon > 0$ existiert mit*

$$B_\varepsilon(x) \subseteq M.$$

(b) *Der Abschluss $\overline{M}$ ist die Menge aller $x \in X$ derart, dass*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

in X für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M.

Beweis. (a) $x \in M^0$ ist nach Satz 13.3 (a) dazu äquivalent, dass M eine Umgebung von x ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $B_\varepsilon(x) \subseteq M$ für ein $\varepsilon > 0$.

(b) Ist $x \in \overline{M}$, so existiert nach Satz 13.3 (b) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{1/n}(x) \cap M$. Wegen $d(x, x_n) < 1/n \to 0$ gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

Ist umgekehrt $x \in X$ und

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

mit Elementen $x_n \in M$, so existiert für jede Umgebung V von x in X (die ja eine geeignete ε-Umgebung enthält) ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N)\ x_n \in V.$$

Insbesondere ist $x_N \in V \cap M$, also $V \cap M \neq \emptyset$ und somit $x \in \overline{M}$ (nach Satz 13.3 (b)). □

Beispiele 13.5 (a) Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$. dann ist

$$\begin{aligned} [a,b[^0 &= \ ]a,b[\\ \overline{[a,b[} &= [a,b] \\ \partial[a,b[&= \{a,b\}. \end{aligned}$$

(b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für Kugeln bzgl. $\|\cdot\|$ gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{B_r(0)} &= \overline{B}_r(0), \\ \overline{B}_r(0)^0 &= B_r(0) \quad \text{und} \\ \partial B_r(0) &= \partial\overline{B}_r(0) = \{x \in E \colon \|x\| = r\} \end{aligned}$$

Beweis: Weil $\|\cdot\|$ stetig ist und $[0,r] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, ist

$$\overline{B}_r(0) = \|\cdot\|^{-1}([0,r])$$

abgeschlossen (wie jedes Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion); somit ist $\overline{B_r(0)} \subseteq \overline{B}_r(0)$. Ist $x \in \overline{B}_r(0)$, so ist $\|x\| \leq r$, somit $(1-\frac{1}{k})\|x\| < r$ für $k \in \mathbb{N}$, somit $(1-\frac{1}{k})x \in B_r(0)$. Nun gilt aber $(1-\frac{1}{k}, x) \to (1, x)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ für $k \to \infty$ (da dies komponentenweise gilt) und somit

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)x \to 1x = x$$

für $k \to \infty$ wegen der Stetigkeit der Multiplikation $\mathbb{R} \times E \to E$ mit Skalaren. Also ist $x \in \overline{B_r(0)}$, somit $\overline{B}_r(0) \subseteq \overline{B_r(0)}$ und folglich $\overline{B_r(0)} = \overline{B}_r(0)$. Da $B_r(0)$ offen ist, ist $B_r(0)^0 = B_r(0)$. Somit

$$\partial B_r(0) = \overline{B_r(0)} \setminus B_r(0)^0 = \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0).$$

Da $B_r(0)$ offen und in $\overline{B}_r(0)$ enthalten ist, ist $B_r(0) \subseteq \overline{B}_r(0)^0$. Ist $x \in \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0)$, so ist $\|x\| = r$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $x + \frac{\varepsilon}{2}x \in B_\varepsilon(x)$ und $x + \frac{\varepsilon}{2}x \notin \overline{B}_r(0)$, da $\|x + \frac{\varepsilon}{2}x\| = (1+\varepsilon/2)\|x\| = (1+\varepsilon/2)r > r$. Also ist $x \notin \overline{B}_r(0)^0$. Wir folgern $\overline{B}_r(0)^0 = B_r(x)$. Da $\overline{B}_r(0)$ abgeschlossen ist, ist $\overline{B}_r(0) = \overline{\overline{B}_r(0)}$. Folglich ist $\partial\overline{B}_r(0) = \overline{\overline{B}_r(0)} \setminus \overline{B}_r(0)^0 = \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0)$.

(c) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, denn für jede reelle Zahl x existiert[20] eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \to x$.

Bemerkung 13.6 Für eine Teilmenge M eines topologischen Raums X beobachten wir noch:

(a) M is genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$.

(b) M ist genau dann offen, wenn $M = M^0$.

Ist nämlich $M = \overline{M}$, so ist M abgeschlossen (denn $\overline{M}$ ist abgeschlossen). Ist M abgeschlossen, so ist $A := M$ eine M enthaltende abgeschlossene Menge und somit $M \subseteq \overline{M} \subseteq A = M$, mithin $M = \overline{M}$.

Ist $M = M^0$, so ist M (wie M^0) offen. Ist M offen, so ist $V := M$ eine in M enthaltene offene Teilmenge von X und somit $M = V \subseteq M^0 \subseteq M$, also $M = M^0$.

Definition 13.7 Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt *dicht* (in X), wenn $\overline{M} = X$.

[20] Z.B. die endlichen Dezimalbrüche q_n der Darstellung von x als unendlicher Dezimalbruch, mit n Stellen hinter dem Komma.

Beispiel 13.8 $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Stetige Funktionen sind durch ihre Werte auf dichten Teilmengen festgelegt:

Satz 13.9 *Es seien $f: X \to Y$ und $g: X \to Y$ Funktionen zwischen metrischen Räumen. Ist $f|_M = g|_M$ für eine dichte Teilmenge $M \subseteq X$, so ist $f = g$.*

Analoges gilt, wenn allgemeiner X ein topologischer Raum ist und Y ein Hausdorffscher topologischer Raum.

Beweis. Seien zunächst X und Y metrische Räume. Für jedes $x \in X = \overline{M}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$. Dann ist $f(x_n) = g(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f und g stetig sind, folgt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Den allgemeinen Fall kann man durch einen Widerspruchsbeweis zeigen (den wir in der Vorlesung überspringen). Angenommen, $f(x) \neq g(x)$ für ein $x \in X$. Weil $f|_M = g|_M$, folgt $x \notin M$. Also ist

$$x \in X \setminus M = \overline{M} \setminus M \subseteq \overline{M} \setminus M^0 = \partial M.$$

Da Y Hausdorffsch ist, gibt es offene Umgebungen V von $f(x)$ und W von $g(x)$ mit

$$V \cap W = \emptyset. \tag{63}$$

Dann ist $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ eine offene Menge, die x enthält. Da $x \in \partial M$, existiert ein

$$y \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W), \tag{64}$$

das zudem in M ist. Da $y \in M$, ist $f(y) = g(y)$. Nach (64) ist also

$$f(y) = g(y) \in V \cap W.$$

Dies widerspricht (63). □

Bemerkung 13.10 Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist genau dann dicht in X, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ für jede offene, nicht-leere Teilmenge $V \subseteq X$.

[Ist M dicht und V wie zuvor, so wähle $x \in V$. Da $x \in \overline{M}$ und V eine Umgebung von x ist, existiert ein $y \in M \cap V$ (siehe Satz 13.3(b)).

Hat umgekehrt M die angegebene Eigenschaft, so ist für jedes $x \in X$ und jede offene Umgebung V von x der Durchschnitt $V \cap M$ nicht leer, somit $x \in \overline{M}$ nach Satz 13.3(b). Also ist $X = \overline{M}$, somit M dicht in X.]

14 Kompaktheit und Anwendungen

In der Analysis 1 haben wir gesehen, dass jede stetige Funktion

$$f\colon K \to \mathbb{R}$$

auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $K = [a, b]$ ein Maximum annimmt. Weiter ist f gleichmäßig stetig. Ist f injektiv, so ist zudem die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon f(K) \to K$ automatisch stetig. In diesem Kapitel verallgemeinern wir solche Ergebnisse weiter (insbesondere auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$). Wir werden sehen, dass die sogenannte *Kompaktheit* des Intervalls $K = [a, b]$ hinter den beschriebenen Phänomenen steckt.

Bemerkung 14.1 Bevor ich die etwas gewöhnungsbedürftige Definition von kompakten Mengen gebe, sage ich Ihnen schon einmal, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ schließlich kompakt sein werden. Wir werden sehen:

Für eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

(a) *K ist kompakt*;

(b) *K ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und beschränkt*;

(c) *Jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in K hat eine Teilfolge, die gegen ein $x \in K$ konvergiert.*

Zum Beispiel sind abgeschlossene Kugeln

$$\overline{B}_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$$

bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ stets abgeschlossen (wie schon gezeigt) und beschränkt,[21] somit kompakt.

Als Hilfsmittel zur Definition kompakter Mengen benötigen wir sogenannte offene Überdeckungen.

Definition 14.2 Eine Familie $(V_j)_{j\in J}$ von Teilmengen eines topologischen Raums X heißt *offene Überdeckung von X*, wenn jedes V_j eine offene Teilmenge von X ist und

$$X = \bigcup_{j\in J} V_j. \tag{65}$$

[21] Weil $\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| \leq \|x\| + r$ für alle y in $\overline{B}_r(x)$, ist das Supremum über alle y kleiner gleich $\|x\| + r < \infty$.

Beispiele 14.3 (a) Die Intervalle $]n-1, n+1[$ bilden für $n \in \mathbb{Z}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.

(b) Auch die Intervalle $]-n, n[$ bilden eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, für $n \in \mathbb{N}$.

In der folgenden Definition denken wir (wie immer) insbesondere an einen metrischen Raum K oder eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 14.4 Ein topologischer Raum K heißt *kompakt*, wenn er Hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Damit ist gemeint: Für jede offene Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ von K existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$, so dass

$$K = \bigcup_{j\in F} V_j,$$

also $(V_j)_{j\in F}$ eine offene Überdeckung von K ist.

Bemerkung 14.5 Verzichtet man auf die Hausdorffeigenschaft und verlangt nur die endliche Überdeckungseigenschaft, so wird K *quasikompakt* genannt. Wir benutzen diesen allgemeineren Begriff nur gelegentlich.[22]

Beispiel 14.6 $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, denn die offenen Überdeckungen aus den Beispielen 14.3 haben keine endlichen Teilüberdeckungen.

Beispiel 14.7 Es sei $K = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Hausdorffscher topologischer Raum, der aus endlich vielen Elementen besteht. Dann ist K kompakt. Ist nämlich $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K, so gibt es für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ ein $j_k \in J$ mit $x_k \in V_{j_k}$. Dann ist

$$K = \bigcup_{k=1}^{m} V_{j_k} = \bigcup_{j\in F} V_j$$

mit $F := \{j_1, \ldots, j_m\}$.

[22] Im englischen Sprachraum sind die Konventionen anders: “compact” = quasikompakt; “compact Hausdorff” = kompakt.

Definition 14.8 Eine Teilmenge K eines topologischen Raums X (z.B. $X = \mathbb{R}^n$) wird kompakt genannt, wenn sie mit der induzierten Topologie ein kompakter topologischer Raum ist. Entsprechend für Quasikompaktheit.

Lemma 14.9 *Ist X ein topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine Teilmenge, so sind äquivalent:*

(a) *K ist quasikompakt als topologischer Raum (mit der induzierten Topologie), d.h. ist $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie von relativ offenen Mengen V_j in K mit*

$$K = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

so gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $K = \bigcup_{j\in F} V_j$.

(b) *Für jede Familie $(W_j)_{j\in J}$ von offenen Teilmengen W_j von X mit*

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$$

gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$.

Solche Familien $(W_j)_{j\in J}$ nennen wir auch "offene Überdeckungen von K in X". Ist dies aus dem Zusammenhang klar, lässt man die Worte "in X" weg.

Beweis. (a)⇒(b): Ist $(W_j)_{j\in J}$ eine Familie offener Teilmengen von X mit $K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$, so sind $V_j := K \cap W_j$ relativ offene Teilmengen von K mit

$$\bigcup_{j\in J} V_j = \bigcup_{j\in J} (K \cap W_j) = K \cap \bigcup_{j\in J} W_j = K.$$

Per Voraussetzung gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $K = \bigcup_{j\in F} V_j$. Da $V_j = K \cap W_j \subseteq W_j$, folgt $K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$.

(b)⇒(a): Ist $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie relativ offener Teilmengen von K mit $K = \bigcup_{j\in J} V_j$, so existieren offene Teilmengen $W_j \subseteq X$ mit $V_j = K \cap W_j$. Da $V_j \subseteq W_j$, ist

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j$$

und per Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ derart, dass

$$K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j.$$

Somit ist

$$K = K \cap \bigcup_{j\in F} W_j = \bigcap_{j\in F}(K \cap W_j) = \bigcup_{j\in F} V_j$$

und K als quasikompakt erkannt. □

Beispiel 14.10 Es sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ (oder einem Hausdorffschen topologischen Raum X) mit Grenzwert x. Dann ist die Menge

$$K := \{x_m \colon m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt.

[Beweis: Sei $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie offener Teilmengen von X mit $K \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$. Dann existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in V_{j_0}$. Weil V_{j_0} eine Umgebung von x ist und $x_m \to x$ für $m \to \infty$, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall m \geq m_0) \qquad x_m \in V_{j_0}.$$

Für jedes $m \in \{1, \ldots, m_0 - 1\}$ finden wir ein $j_m \in J$ mit $x_m \in V_{j_m}$. Dann ist

$$K \subseteq \bigcup_{j=0}^{m_0-1} V_{j_m},$$

denn x und die x_m mit $m \geq m_0$ liegen in V_{j_0}, die verbleibenden $x_1, \ldots, x_{m_0-1}$ in $V_{j_1} \cup \cdots \cup V_{j_{m_0-1}}$].

Satz 14.11 *Ist X ein Hausdorffscher topologischer Raum und $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge, so ist K abgeschlossen in X. Insbesondere ist jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen, dass das Komplement $X \setminus K$ offen ist, also eine Umgebung für jedes $y \in X \setminus K$. Da X Hausdorffsch ist, existieren für jedes $x \in K$ offene Umgebungen P_x von x und Q_x von y in X mit

$$P_x \cap Q_x = \emptyset.$$

Dann ist $K \subseteq \bigcup_{x\in K} P_x$ und somit existiert (nach Lemma 14.9 (b)) eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{x\in F} P_x.$$

Die Menge $Q := \bigcap_{x\in F} Q_x$ ist eine offene Umgebung von y als Durchschnitt endlich vieler offener Umgebungen. Nun gilt

$$Q \cap K \subseteq Q \cap \bigcup_{x\in F} P_x = \bigcup_{x\in F}(Q \cap P_x) \subseteq \bigcup_{x\in F}(Q_x \cap P_x) = \bigcup_{x\in F} \emptyset = \emptyset,$$

also $Q \cap K = \emptyset$. Also ist $Q \subseteq X \setminus K$, also $X \setminus K$ eine Umgebung von y. $\square$

Satz 14.12 *Ist K ein kompakter topologischer Raum, so ist eine Teilmenge $A \subseteq K$ genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen ist.*

Beweis. Als kompakter Raum ist K Hausdorffsch. Ist also A kompakt, so ist A in K nach Satz 14.11 abgeschlossen. Ist umgekehrt A abgeschlossen und ist $(W_j)_{j\in J}$ eine Familie von offenen Teilmengen von K mit

$$A \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j,$$

so ist $K \setminus A$ offen in K (als Komplement einer abgeschlossenen Menge) und

$$K = (K \setminus A) \cup \bigcup_{j\in J} W_j.$$

Wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ derart, dass

$$K = (K \setminus A) \cup \bigcup_{j\in F} W_j.$$

Somit ist

$$A \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$$

und A als kompakt erkannt. $\square$

Satz 14.13 *Ist K ein kompakter topologischer Raum und $f\colon K \to Y$ eine stetige Abbildung in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y, so ist $f(K)$ kompakt. Weiter ist $f(A)$ kompakt (und somit in Y abgeschlossen) für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$.*

Beweis. Ist $(W_j)_{j\in J}$ eine Familie offener Teilmengen von Y mit

$$f(K) \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j,$$

so sind die Urbilder $f^{-1}(W_j)$ offen in X (weil f stetig ist) und

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} W_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(W_j).$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j\in F} f^{-1}(W_j).$$

Es folgt

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{j\in F} f^{-1}(W_j)\right) = \bigcup_{j\in F} f(f^{-1}(W_j)) \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j.$$

Also ist $f(K)$ kompakt.

Ist $A \subseteq K$ abgeschlossen, so ist A kompakt (nach Satz 14.12), somit $f(A)$ kompakt (nach dem bereits Gezeigten), somit $f(A)$ in Y abgeschlossen (nach Satz 14.11). $\square$

Definition 14.14 Ein *Homöomorphismus* ist eine stetige bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen, deren Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

Satz 14.15 (Satz über die Umkehrfunktion) *Ist K ein kompakter topologischer Raum, Y ein Hausdorffscher topologischer Raum und $f\colon K \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung, so ist f ein Homöomorphismus, d.h. auch*

$$f^{-1}\colon Y \to K$$

ist stetig.

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass die Abbildung $g := f^{-1}\colon Y \to K$ stetig ist. Nach Satz 11.7(c) wissen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn das Urbild

$$g^{-1}(A)$$

in Y abgeschlossen ist für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq K$. Nun gilt aber

$$g^{-1}(A) = \{y \in Y\colon f^{-1}(y) = g(y) \in A\} = f(A),$$

und all diese Bilder sind tatsächlich abgeschlossen, wie am Ende von Satz 14.13 festgestellt. □

Folgerung 14.16 *Ist K ein kompakter topologischer Raum und*

$$f\colon K \to Y$$

eine injektive stetige Abbildung in einen Hausdorffschen topologischen Raum Y, so ist f eine topologische Einbettung,[23] *d.h. die Koeinschränkung*

$$f|^{f(K)}\colon K \to f(K), \quad x \mapsto f(x)$$

ist ein Homöomorphismus, wenn man $f(K)$ mit der von Y induzierten Topologie versieht.

Beweis. Wir wenden den vorigen Satz auf die stetige bijektive Abbildung $f|^{f(K)}\colon K \to f(K)$ an. □

Lemma 14.17 *Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $K \subseteq E$ eine kompakte Teilmenge, so ist diese beschränkt, also*

$$\sup\{\|x\|\colon x \in K\} < \infty.$$

Beweis. Die Kugeln $B_r(0)$ bezüglich $\|\cdot\|$ sind offen und

$$K \subseteq \bigcup_{r>0} B_r(0).$$

[23] Andere Bezeichnung: Ein Homöomorphismus aufs Bild.

Wegen der Kompaktheit existieren also $r_1, \ldots, r_m > 0$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_{r_k}(0).$$

Setzen wir $r := \max\{r_1, \ldots, r_m\}$, so ist $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_{r_k}(0) = B_r(0)$, also $\sup\{\|x\| \colon x \in K\} \leq r$. $\square$

Satz 14.18 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Ein metrischer Raum (K, d) ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge hat.*

Beweis von Satz 14.18. Wir zeigen zunächst: Ist K kompakt, so hat jede Folge in K eine konvergente Teilfolge. Und zwar per Kontraposition. Angenommen also, es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K, die keine konvergente Teilfolge hat. Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt, nach Lemma C.24 (b) existieren also zu jedem $x \in K$ ein $\varepsilon_x > 0$ und $N_x \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall n \geq N_x) \qquad x_n \notin B_{\varepsilon_x}(x).$$

Es ist $K = \bigcup_{x\in K} B_{\varepsilon_x}(x)$. Wäre K kompakt, so müsste $K = \bigcup_{x\in F} B_{\varepsilon_x}(x)$ gelten mit einer endlichen Teilmenge $F \subseteq K$. Sei

$$N := \max\{N_x \colon x \in F\} \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \geq N$ gilt für jedes $x \in F$ dann $n \geq N_x$, somit $x_n \notin B_{\varepsilon_x}(x)$. Also ist $x_n \notin \bigcup_{x\in F} B_{\varepsilon_x}(x) = K$, Widerspruch. Somit ist K doch nicht kompakt.

Sei umgekehrt angenommen, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K. Wenn $(V_j)_{j\in J}$ keine endliche Teilüberdeckung hätte, könnten wir wie folgt verfahren: Wir wählen $x_1 \in K$ und $m(1) \in \mathbb{N}$ minimal derart, dass $B_{1/m(1)}(x_1) \subseteq V_{j(1)}$ für ein $j(1) \in J$. Sind $x_1, \ldots, x_{n-1} \in K$, $m(1), \ldots, m(n-1) \in \mathbb{N}$ und $j(1), \ldots, j(n-1) \in J$ bereits gefunden, so sei

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} V_{j(i)}$$

(wobei diese Menge nicht leer ist, weil sonst $(V_{j(i)})_{i=1}^{n-1}$ eine endliche Teilüberdeckung für K wäre) und wir wählen $m(n) \in \mathbb{N}$ minimal derart, dass

$B_{1/m(n)}(x_n) \subseteq V_{j(n)}$ für ein $j(n) \in J$. Per Voraussetzung hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Dann ist $x \in V_j$ für ein $j \in J$ und es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $B_{1/m}(x) \subseteq V_j$. Da $x_{n_k} \to x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(\forall k \geq N) \quad d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{4m}.$$

Für alle $k \geq N$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$B_{\frac{1}{2m}}(x_{n_k}) \subseteq B_{\frac{1}{2m}+\frac{1}{4m}}(x) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq V_j.$$

Wegen der Minimalität von $m(n_k)$ ist also

$$m(n_k) \leq 2m$$

und somit $\frac{1}{m(n_k)} \geq \frac{1}{2m}$. Nun ist $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq d(x_{n_k}, x) + d(x, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} = \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{m(n_k)}$, also $x_{n_{k+1}} \in B_{1/m(n_k)}(x_{n_k}) \subseteq V_{j(n_k)}$. Per Konstruktion ist aber

$$x_{n_{k+1}} \notin \bigcup_{i=1}^{n_{k+1}-1} V_{j(i)},$$

Widerspruch. Also muss $(V_j)_{j\in J}$ doch eine endliche Teilüberdeckung haben und somit K kompakt sein. □

Satz 14.19 (Satz vom Maximum) *Es sei K ein nicht-leerer kompakter topologischer Raum (z.B. eine nicht-leere kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$) und $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es existieren Elemente $x_*, x^* \in K$ derart, dass*

$$f(x_*) = \min\{f(x)\colon x \in K\} \quad \textit{und} \quad f(x^*) = \max\{f(x)\colon x \in K\}.$$

Beweis. Nach Satz 14.13 ist die Teilmenge $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Wir wählen eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(K)$ derart, dass

$$y_n \to \sup f(K)$$

für $n \to \infty$. Da $f(K)$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik ein kompakter metrischer Raum ist, gibt es eine gegen ein $y \in f(K)$ konvergente Teilfolge

$(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gibt ein $x^* \in K$ mit $y = f(x^*)$. Da $y_{n_k} \to y$ und $y_{n_k} \to \sup f(K)$ für $k \to \infty$, folgt $\sup f(K) = y = f(x^*)$. Die Existenz von Minima zeigt man analog. $\square$

Satz 14.20 (Satz von Heine-Borel) *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist K kompakt, so ist K nach Satz 14.11 abgeschlossen und nach Lemma 14.17 beschränkt.

Ist umgekehrt K abgeschlossen und beschränkt, so gibt es wegen der Beschränktheit ein $r > 0$ mit

$$K \subseteq \overline{B}_r(0) = [-r, r] \times \cdots \times [-r, r],$$

wobei $\overline{B}_r(0)$ die Kugel bezüglich der Maximums-Norm ist. Nach Lemma 7.16 hat jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in K eine Teilfolge $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die in $\mathbb{R}^n$ gegen ein $x \in [-r, r]^n$ konvergiert. Da K per Voraussetzung in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist und $x_{m_k} \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt für den Limes in $\mathbb{R}^n$

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{m_k} \in K.$$

Für $k \to \infty$ gilt dann auch $x_{m_k} \to x$ in K, es hat also $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ stets eine in K konvergent Teilfolge. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist K somit kompakt. $\square$

Satz 14.21 (Lemma von Wallace) *Es seien X_1 und X_2 topologische Räume, $K_1 \subseteq X_1$ und $K_2 \subseteq X_2$ kompakte (oder quasikompakte) Teilmengen und $V \subseteq X_1 \times X_2$ eine offene Menge derart, dass*

$$K_1 \times K_2 \subseteq V.$$

Dann existieren offene Teilmengen $V_1 \subseteq X_1$ und $V_2 \subseteq X_2$ mit $K_1 \subseteq V_1$, $K_2 \subseteq V_2$ und $V_1 \times V_2 \subseteq V$, also

$$K_1 \times K_2 \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq V.$$

Wir können die kompakten Mengen K_1 und K_2 also zu offenen Mengen V_1 und V_2 vergrößern, so dass immer noch $V_1 \times V_2 \subseteq V$.

Beweis. Ist $K_1 = \emptyset$, so können wir $V_1 := \emptyset$, $V_2 := X_2$ wählen; auch der Fall $K_2 = \emptyset$ ist trivial. Wir dürfen daher nun annehmen, dass K_1 und K_2 beide nicht leer sind.

Für jedes $x \in K_1$ und $y \in K_2$ ist $(x, y) \in V$. Da V offen in der Produkttopologie ist, gibt es also offene Mengen $P_{x,y} \subseteq X_1$ und $Q_{x,y} \subseteq X_2$ derart, dass

$$(x, y) \in P_{x,y} \times Q_{x,y} \subseteq V.$$

Halte $y \in K_2$ fest. Da K_1 quasikompakt ist und

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x \in K_1} P_{x,y},$$

gibt es eine endliche Teilmenge $F_y \subseteq K_1$ derart, dass

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x \in F_y} P_{x,y} =: P_y.$$

Als endlicher Durchschnitt offener Umgebungen ist dann

$$Q_y := \bigcap_{x \in F_y} Q_{x,y}$$

eine offene Umgebung von y in X_2. Weiter gilt

$$K_1 \times \{y\} \subseteq P_y \times Q_y = \bigcup_{x \in F_y} (P_{x,y} \times Q_y) \subseteq \bigcup_{x \in F_y} (P_{x,y} \times Q_{x,y}) \subseteq V.$$

Da K_2 quasikompakt ist und

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y \in K_2} Q_y,$$

gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq K_2$ derart, dass

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y \in F} Q_y =: V_2.$$

Die Menge $V_2 \subseteq X_2$ ist offen und enthält K_2. Weiter ist

$$V_1 := \bigcap_{y \in F} P_y$$

eine offene Teilmenge von X_1, die K_1 enthält, denn V_1 ist der Durchschnitt von endlich vielen Mengen mit diesen Eigenschaften. Wir schließen, dass

$$K_1 \times K_2 \subseteq V_1 \times V_2 = V_1 \times \bigcup_{y \in F} Q_y = \bigcup_{y \in F} (V_1 \times Q_y) \subseteq \bigcup_{y \in F} (P_y \times Q_y) \subseteq V.$$

Also haben V_1 und V_2 die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Satz 14.22 (Stetigkeit parameter-abhängiger Integrale) *Seien $a < b$ reelle Zahlen, X ein topologischer Raum (z.B. eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$) und*

$$f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$g\colon X \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \int_a^b f(x,t)\, dt$$

stetig.

Beweis. Um zu sehen, dass g an einer gegebenen Stelle $x \in X$ stetig ist, sei $W \subseteq \mathbb{R}$ eine Umgebung von $g(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon] \subseteq W$. Wir setzen $\theta := \frac{\varepsilon}{b-a}$. Die Funktion

$$h\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(y,t) := f(y,t) - f(x,t)$$

ist stetig[24] und es ist $h(x,t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$. Somit ist

$$\{x\} \times [a,b] \subseteq h^{-1}(0) \subseteq h^{-1}(]-\theta, \theta[),$$

wobei $h^{-1}(]-\theta,\theta[)$ wegen der Stetigkeit von h offen ist. Nun ist die einpunktige Menge $\{x\} \subseteq X$ kompakt (siehe Beispiel 14.7) und auch $[a,b]$ ist kompakt. Nach dem Wallaceschen Lemma gibt es also offene Mengen $V_1 \subseteq X$ und $V_2 \subseteq [a,b]$ mit

$$\{x\} \times [a,b] \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq f^{-1}(]-\theta,\theta[).$$

[24]Die Funktion $X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $(y,t) \mapsto f(x,t)$ ist stetig, denn sie ist die Komposition der Projektion $\pi_2\colon X \times [a,b] \to [a,b]$, $(y,t) \mapsto t$ und der "partiellen Abbildung" $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$, die nach Beispiel 12.10 stetig ist.

Dann ist $[a,b] \subseteq V_2 \subseteq [a,b]$ und somit $V_2 = [a,b]$, also

$$V_1 \times [a,b] \subseteq h^{-1}(]-\theta,\theta[)$$

und daher $h(y,t) \in]-\theta,\theta[$ für alle $y \in V_1$ und $t \in [a,b]$. Also ist

$$(\forall y \in V_1, t \in [a,b]) \quad |f(y,t) - f(x,t)| = |h(y,t)| < \theta.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= \left| \int_a^b f(y,t)\,dt - \int_a^b f(x,t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(y,t) - f(x,t))\,dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(y,t) - f(x,t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b \theta\,dt = (b-a)\theta = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $y \in V_1$, somit $g(y) \in [g(x)-\varepsilon, g(x)+\varepsilon] \subseteq W$ für alle $y \in V_1$. Also ist g an der Stelle x stetig. □

Satz 14.23 (Lebesguesches Lemma) *Es sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und $(V_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existiert eine reelle Zahl $\delta > 0$ derart, dass*

$$(\forall x \in K)(\exists j \in J) \quad B_\delta(x) \subseteq V_j,$$

wobei $B_\delta(x) := \{y \in K \colon d(x,y) < \delta\}$.

Ein $\delta > 0$ mit der vorigen Eigenschaft wird auch ein *Lebesguesches Delta* genannt.

Beweis. Für jedes $x \in K$ existiert ein $j(x) \in J$ derart, dass $x \in V_{j(x)}$. Da die Menge $V_{j(x)}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon(x) > 0$ derart, dass

$$B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq V_{j(x)}. \tag{66}$$

Weil $(B_{\varepsilon(x)/2}(x))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K ist und K kompakt, existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$ derart, dass

$$K = \bigcup_{x\in F} B_{\varepsilon(x)/2}(x). \tag{67}$$

Wir setzen

$$\delta := \min\{\varepsilon(x)/2 \colon x \in F\}.$$

Für jedes $y \in K$ existiert nach (67) ein $x \in F$ derart, dass $y \in B_{\varepsilon(x)/2}(x)$. Da $\delta \leq \varepsilon(x)/2$, ist für alle $z \in B_\delta(y)$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{\varepsilon(x)}{2} + \delta \leq \frac{\varepsilon(x)}{2} + \frac{\varepsilon(x)}{2} = \varepsilon,$$

also $z \in B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq V_{j(x)}$ und somit $B_\delta(y) \subseteq V_{j(x)}$. □

Satz 14.24 *Es seien (K, d_K) und (Y, d_Y) metrische Räume. Ist K kompakt, so ist jede stetige Abbildung $f \colon K \to Y$ gleichmäßig stetig, d.h.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y, z \in K) \quad d_K(y,z) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(y), f(z)) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, ist f an jeder Stelle $x \in K$ stetig und somit hat x eine offene Umgebung $V_x \subseteq K$ derart, dass

$$(\forall y \in V_x) \quad d_Y(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt dann also

$$(\forall y, z \in V_x) \quad d_Y(f(y), f(z)) \leq d_Y(f(y), f(x)) + d_Y(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{68}$$

Nach dem Lebesgueschen Lemma existiert ein Lebesguesches Delta $\delta > 0$ für die offene Überdeckung $(V_x)_{x \in K}$ von K. Sind $y, z \in K$ mit $d_K(y,z) < \delta$, so ist

$$z \in B_\delta(y). \tag{69}$$

Per Definition des Lebesgueschen Deltas existiert ein $x \in K$ mit

$$B_\delta(y) \subseteq V_x.$$

Nach (69) sind dann $y, z \in V_x$ und somit gilt nach (68):

$$d_Y(f(y), f(z)) < \varepsilon,$$

was den Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit beendet. □

Definition 14.25 Ist X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge, so nennt man eine Teilmenge $V \subseteq X$ eine *Umgebung von M in X*, wenn M im Innern von V enthalten ist, d.h. $M \subseteq V^0$. Ist V offen, so wird also $M \subseteq V$ verlangt.

Offene Umgebungen kompakter Mengen enthalten stets eine gleichmäßige Umgebung:

Satz 14.26 *Ist (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge mit $K \subseteq U$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass*

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon^X(x) \subseteq U.$$

Man nennt $\bigcup_{x \in K} B_\varepsilon^X(x)$ eine *gleichmäßige Umgebung* von K in X.

Beweis. Wir dürfen $K \neq \emptyset$ annehmen. Für jedes $x \in K$ existiert ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{2\varepsilon(x)}^X(x) \subseteq U$. Dann ist $B_{\varepsilon(x)}^X(x)$ für $x \in K$ eine offene Überdeckung von K; also existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq B_{\varepsilon(x_1)}^X(x_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon(x_n)}^X(x_n).$$

Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_n)\}$. Gegeben $x \in K$ existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in B_{\varepsilon(x_j)}^X(x_j)$. Wegen der Dreiecksungleichung ist dann $B_\varepsilon^X(x) \subseteq B_{\varepsilon(x_j)}^X(x) \subseteq B_{2\varepsilon(x_j)}^X(x_j) \subseteq U$. $\square$

Definition 14.27 Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X, deren Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist, wird *relativ kompakt* genannt.

Zum Beispiel sind für jede gewählte Norm offene Kugeln $B_\varepsilon(x)$ in $\mathbb{R}^n$ relativ kompakt, da ihr Abschluss $\overline{B}_\varepsilon(x)$ kompakt ist.

Präkompaktheit*

Es später nützlich, kompakte metrische Räume auf noch eine weitere Art charakterisieren zu können. Wir überspringen diese eher weiterführende Diskussion in der Vorlesung, sie ist nicht prüfungsrelevant.

Definition 14.28 Ein metrischer Raum (X, d) heißt *präkompakt* (oder auch "total beschränkt"), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq X$ existiert mit

$$X = \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon^X(x)$$

(d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ hat $(B_\varepsilon^X(x))_{x \in X}$ eine endliche Teilüberdeckung).

Satz 14.29 (Charakterisierung kompakter metrischer Räume) *Für einen metrischen Raum (K, d) sind äquivalent:*

(a) *K ist kompakt;*

(b) *(K, d) ist präkompakt und vollständig;*

(c) *In K hat jede Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (c) wurde in Satz 14.18 gezeigt.

Gilt (a), so hat wegen (c) jede Cauchyfolge in (K, d) eine konvergente Teilfolge; nach Lemma C.22 ist die Cauchfolge somit konvergent. Also ist (K, d) vollständig. Da für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Überdeckung $(B_\varepsilon^K(x))_{x \in K}$ eine endliche Teilüberdeckung hat, ist (K, d) präkompakt. Somit gilt (b).

(b)$\Rightarrow$(c): Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine endliche Teilmenge $F_k \subseteq K$ derart, dass

$$K = \bigcup_{x \in F_k} B_{1/k}^K(x).$$

Es existiert ein $y_1 \in F_1$ derart, dass

$$I_1 := \{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in B_1^K(y_1)\}$$

eine unendliche Menge ist. Ist $2 \leq k \in \mathbb{N}$ und sind $y_j \in F_j$ bereits gefunden für $j \in \{2, \ldots, k-1\}$ derart, dass

$$I_j := \{n \in I_{j-1} \colon x_n \in B_{1/j}^K(y_j)\}$$

eine unendliche Menge ist, so existiert ein $y_k \in F_k$ derart, dass $I_k := \{n \in I_{k-1} \colon x_n \in B_{1/k}^K(y_k)\}$ eine unendliche Menge ist. Wir setzen $n_1 := \min I_1$ und rekursiv $n_k := \min I_k \setminus \{n_1, \ldots, n_{k-1}\}$ für $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Wegen $n_1 < n_2 < \cdots$ ist dann $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein

$N \in \mathbb{N}$ mit $2/N \leq \varepsilon$. Für alle $k, \ell \geq N$ gilt $n_k \in I_k \subseteq I_N$ und $n_\ell \in I_\ell \subseteq I_N$, also

$$d(x_{n_k}, y_N) < 1/N \leq \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad d(x_{n_\ell}, y_N) < 1/N \leq \varepsilon/2$$

und folglich $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq d(x_{n_k}, y_N) + d(y_N, x_{n_\ell}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Also ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (K, d) und somit konvergent, da (K, d) vollständig angenommen ist. $\square$

15 Wege und Weglänge

In diesem Kapitel betrachten wir Wege in $\mathbb{R}^n$ und ordnen ihnen eine Weglänge zu. Unser Hauptinteresse gilt stetigen Wegen und C^1-Wegen.

Definitionen und erste Beispiele

Definition 15.1 Ein *Weg* (oder C^0-Weg) in $E := \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to E$ mit $a < b$. Man nennt γ auch einen Weg *von* $\gamma(a)$ *nach* $\gamma(b)$; weiter nennt man $\gamma(a)$ den *Anfangspunkt* des Weges und $\gamma(b)$ seinen *Endpunkt*. Es ist also

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

mit den stetigen Komponenten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ist γ an jeder Stelle $t \in [a,b]$ *differenzierbar* in dem Sinn, dass der Grenzwert[25]

$$\gamma'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}$$

(mit $s \in [a,b] \setminus \{t\}$) existiert und ist

$$\gamma'\colon [a,b] \to E, \quad t \mapsto \gamma'(t)$$

stetig, so wird γ ein *stetig differenzierbarer Weg* oder C^1*-Weg* genannt. Das Bild $\gamma(I)$ eines Wegs wird auch seine *Spur* genannt.

Ersetzt man $[a,b]$ durch ein beliebiges nicht entartetes Intervall, so sprechen wir von einer C^0-Kurve $\gamma\colon I \to E$ bzw. einer C^1-Kurve.

Bemerkung 15.2 Man beachte, dass ein Weg $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ genau dann an einer Stelle $t \in [a,b]$ differenzierbar ist, wenn jede der Komponenten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n\colon a,b] \to \mathbb{R}$ in t differenzierbar ist, und es gilt dann

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)).$$

Für jede Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $[a,b] \setminus \{t\}$ mit $s_k \to t$ existiert nämlich

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\gamma(s_k) - \gamma(t)}{s_k - t}$$

[25] Ist E ein reeller Vektorraum, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $v \in E$, so schreiben wir $\frac{v}{s} := \frac{1}{s}v$.

nach Satz 7.11 genau dann, wenn all die Komponenten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_j(s_k) - \gamma_j(t)}{s_k - t}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

konvergieren, und hat als Komponenten dann die Grenzwerte $\gamma_1'(t)$, ..., $\gamma_n'(t)$ der Komponenten. Weiter ist $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$ genau dann stetig, wenn all die Komponenten es sind. Eine Funktion $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist somit genau dann ein C^1-Weg, wenn alle Komponenten $\gamma_1, \ldots, \gamma_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind.

Ist $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ C^k-Funktionen, so nennt man γ einen C^k-Weg.

Beispiele 15.3 (a) Für $\alpha > 0$ hat die Abbildung

$$\gamma\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

beliebig oft differenzierbare Komponenten, ist also ein C^∞-Weg in $\mathbb{R}^2$ (der den Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn umläuft).

(b) Für $a < b$ ist

$$\gamma\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t, t)$$

ein C^∞-Weg in $\mathbb{R}^3$, der ein Stück einer Schraubenlinie (Korkenzieher) durchläuft.

(c) Sind $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, so sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ der Weg, welcher auf dem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ affin-linear von x_{j-1} nach x_j läuft, also

$$\gamma(t) := x_{j-1} + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1})$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Dann ist $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, dessen Einschränkung auf jedes der Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ ein C^1-Weg ist. Der Weg verbindet geradlinig die gegebenen Punkte, es handelt sich um einen sogenannten *Polygonzug*.

Vektorwertige Integrale und Hauptsatz

Definition 15.4 Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall,

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \colon I \to \mathbb{R}^n$$

eine C^0-Kurve und $a, b \in I$. Wir definieren das Integral der Funktion γ von a bis b als

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)\, dt \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Im folgenden Satz halten wir einige Eigenschaften vektorwertiger Integrale fest. Um vektorwertige Integrale möglichst präzise Abschätzen zu können, nutzen uns im Beweis Riemannsche Summen. Diese werden analog zum reellwertigen Fall (siehe Definition 1.44) definiert.

15.5 Sei $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_\ell = b\}$ eine Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ mit $a < b$ und $B = (b_1, \ldots, b_\ell)$ eine zugehörige Belegung. Ist $\gamma \colon [a, b] \to E$ ein Weg in $E := \mathbb{R}^n$, so definieren wir die *Riemannsche Summe* $S_\gamma(Z, B)$ zur Zerlegung Z und Belegung B als

$$S_\gamma(Z, B) := \sum_{k=1}^{\ell} (t_k - t_{k-1}) \gamma(b_k).$$

Satz 15.6 (Eigenschaften vektorwertiger Integrale) *Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ und $\gamma, \eta \colon [a, b] \to E$ Wege. Dann gilt:*

(a) *Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ ist $r\gamma + s\eta \colon [a, b] \to E$ ein Weg und*

$$\int_a^b (r\gamma(t) + s\eta(t))\, dt = r \int_a^b \gamma(t)\, dt + s \int_a^b \eta(t)\, dt.$$

(b) (*Intervalladditivität*). *Für alle $c \in [a, b]$ ist*

$$\int_a^b \gamma(t)\, dt = \int_a^c \gamma(t)\, dt + \int_c^b \gamma(t)\, dt. \tag{70}$$

(c) (*Integralabschätzungen*). *Es gilt*

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\, dt \leq \|\gamma\|_\infty (b - a) \tag{71}$$

mit $\|\gamma\|_\infty := \sup\{\|\gamma(t)\| \colon t \in [a, b]\}$.

(d) *Für jede Folge* $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *von Zerlegungen* Z_m *von* $[a,b]$ *mit Maschenweite* $\mathrm{mesh}(Z_m)\to 0$ *und jede Folge* $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *von Belegungen gilt*

$$S_\gamma(Z_m,B_m)\to\int_a^b\gamma(t)\,dt\quad \textit{für } m\to\infty.$$

Beweis. (a) Schreibe $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ und $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$. Für $j\in\{1,\ldots,n\}$ ist die $j$te Komponente von $\int_a^b r(\gamma(t)+s\eta(t))\,dt\in\mathbb{R}^n$ gleich

$$\int_a^b(r\gamma_j(t)+s\eta_j(t))\,dt=r\int_a^b\gamma_j(t)\,dt+s\int_a^b\eta_j(t)\,dt$$

und stimmt mit der $j$ten Komponente von $r\int_a^b\gamma(t)\,dt+s\int_a^b\eta(t)\,dt$ überein.

(b) Die $j$te Komponente der linke Seite von (70) ist

$$\int_a^b\gamma_j(t)\,dt=\int_a^c\gamma_j(t)\,dt+\int_c^b\gamma_j(t)\,dt,$$

stimmt also mit derjenigen der rechten Seite überein.

(d) Gegeben $m\in\mathbb{N}$ sei $Z_m=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_\ell=b\}$ mit einem $\ell\in\mathbb{N}$ und $B_m=(b_1,\ldots,b_\ell)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_\gamma(Z_m,B_m) &= \sum_{k=1}^{\ell}(t_k-t_{k-1})\gamma(b_k)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{\ell}(t_k-t_{k-1})\gamma_1(b_k),\ldots,\sum_{k=1}^{\ell}(t_k-t_{k-1})\gamma_n(b_k)\right)\\
&= (S_{\gamma_1}(Z_m,B_m),\ldots,S_{\gamma_n}(Z_m,B_m))\\
&\to \left(\int_a^b\gamma_1(t)\,dt,\ldots,\int_A^b\gamma_n(t)\,dt\right)=\int_A^b\gamma(t)\,dt.
\end{aligned}$$

(c) Gegeben eine Folge von Zerlegungen und Belegungen wie in (e) habe wir für festes m

$$\begin{aligned}
\|S_\gamma(Z_m,B_m)\| &= \left\|\sum_{k=1}^{\ell}(t_k-t_{k-1})\gamma(b_k)\right\|\le\sum_{k=1}^{\ell}\underbrace{|t_k-t_{k-1}|}_{=t_k-t_{k-1}}\cdot\|\gamma(b_k)\|\\
&= S_{\|\gamma\|}(Z_m,B_m)
\end{aligned}$$

mit der stetigen Funktion $\|\gamma\| := \|\cdot\| \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\gamma(t)\|$; hierbei wurden die Subadditivität und positive Homogenität der Norm benutzt. Für $m \to \infty$ folgt mit (d) und Satz 1.45

$$\begin{aligned}
\left\|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right\| &= \left\|\lim_{m\to\infty} S_\gamma(Z_m,B_m)\right\| = \lim_{m\to\infty} \|S_\gamma(Z_m,B_m)\| \\
&\leq \lim_{m\to\infty} S_{\|\gamma\|}(Z_m,B_m) = \int_a^b \|\gamma(t)\|\,dt \\
&\leq (b-a)\|\gamma\|_\infty,
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. □

Es ist nützlich, dass auch hier eine Fassung des Hauptsatzes der Integralrechnung gilt:

Lemma 15.7 *Für jeden C^1-Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $a, b \in I$ gilt*

$$\int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Beweis. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b \gamma'(t)\,dt &= \int_a^b (\gamma_1'(t),\ldots,\gamma_n'(t))\,dt = \left(\int_a^b \gamma_1'(t)\,dt,\ldots,\int_a^b \gamma_n'(t)\,dt\right) \\
&= (\gamma_1(b)-\gamma_1(a),\ldots,\gamma_n(b)-\gamma_n(a)) = \gamma(b)-\gamma(a).
\end{aligned}$$

□

Weglänge und Rektifizierbarkeit

In diesem Abschnitt definieren wie die Länge eines Wegs $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Die Weglänge hängt von der auf $\mathbb{R}^n$ gewählten Norm $\|\cdot\|$ ab. Für die Praxis relevant (und anschaulichen Weglänge entsprechend) ist die Weglänge bezüglich der eulidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$. Die Weglänge auch bezüglich anderer Normen zu berechnen, ist eher unüblich; wir geben jedoch zunächst die allgemeine Definition. Es liegt nahe, die Weglänge eines Polygonzugs (wie in Beispiel 15.3(c)) als

$$\sum_{j=1}^m \|x_j - x_{j-1}\| \tag{72}$$

zu definieren.

Definition 15.8 Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung von $[a,b]$, so sei $L_Z(\gamma)$ die Länge des Polygonzugs durch die Punkte $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_m)$, also

$$L_Z(\gamma) := \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Die *Weglänge* $L(\gamma)$ von γ ist definiert als das Supremum

$$L(\gamma) := \sup_Z L_Z(\gamma) \in [0, \infty],$$

wobei Z alle Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ durchläuft. Ist $L(\gamma) < \infty$, so wird γ *rektifizierbar* genannt.

Wir werden bald sehen, dass jeder C^1-Weg rektifizierbar ist und seine Weglänge in Form eines geeigneten Integrals berechnet werden kann.

Lemma 15.9 *Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Ist $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und Z' eine Verfeinerung von Z, so ist*

$$L_Z(\gamma) \leq L_{Z'}(\gamma).$$

Beweis. Die Verfeinerung Z' geht aus Z hervor, indem wir endlich oft je einen Zwischenpunkt hinzunehmen. Es genügt zu zeigen, dass sich die Weglänge in jedem dieser Schritte nicht verkleinert. Wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$Z' = Z \cup \{s\}$$

mit einem $s \in [a,b] \setminus Z$. Es gibt genau ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ derart, dass

$$t_{k-1} < s < t_k.$$

Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \|\gamma(t_k) - \gamma(s)\| + \|\gamma(s) - \gamma(t_{k-1})\|,$$

somit

$$\begin{aligned}
L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^{k-1} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \|\gamma(t_k) - \gamma(s)\| \\
&\quad + \|\gamma(s) - \gamma(t_{k-1})\| + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&= L_{Z'}(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Lemma 15.10 *Sind $a < b < c$ reelle Zahlen und $\gamma\colon [a,c] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, so ist*

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,b]}) + L(\gamma|_{[b,c]}). \tag{73}$$

Insbesondere ist γ genau dann rektifizierbar, wenn beide Teilwege $\gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma|_{[b,c]}$ rektifizierbar sind.

Beweis. Wir stellen zunächst eine Vorüberlegung an. Ist $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,c]$ derart, dass $b = t_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, so ist $Z' = \{t_0, \ldots, t_k\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $Z'' = \{t_k, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[b,c]$. Weiter gilt

$$L_Z(\gamma) = L_{Z'}(\gamma_{[a,b]}) + L_{Z''}(\gamma|_{[b,c]}),$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&= \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \sum_{j=k+1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \\
&= L_{Z'}(\gamma_{[a,b]}) + L_{Z''}(\gamma|_{[b,c]}).
\end{aligned}$$

Seien nun $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(Z'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(Z''_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zerlegungen von $[a,c]$, $[a,b]$ bzw. $[b,c]$ derart, dass

$$L_{Z_i}(\gamma) \to L(\gamma), \quad L_{Z'_i}(\gamma) \to L(\gamma|_{[a,b]}) \quad \text{und} \quad L_{Z''_i}(\gamma) \to L(\gamma|_{[b,c]})$$

für $i \to \infty$. Es ist $Y_j := Z_j \cup Z'_j \cup Z''_j$ eine Verfeinerung von Z_j. Weiter ist $Y'_j := Y_j \cap [a,b]$ eine Verfeinerung von Z'_j und $Y''_j := Y_j \cap [b,c]$ eine Verfeinerung von Z''_j. Somit ist $L_{Y_j}(\gamma) \geq L_{Z_j}(\gamma)$, folglich $L_{Y_j}(\gamma)$ dem Supremum $L(\gamma)$ näher. Also gilt erst recht

$$L_{Y_i}(\gamma) \to L(\gamma)$$

und ebenso $L_{Y'_i}(\gamma) \to L(\gamma|_{[a,b]})$ und $L_{Y''_i}(\gamma) \to L(\gamma|_{[b,c]})$. Da $Y_i = Y'_i \cup Y''_i$, ist jedoch nach der Vorüberlegung

$$L_{Y_i}(\gamma) = L_{Y'_i}(\gamma|_{[a,b]}) + L_{Y''_i}(\gamma|_{[b,c]}) \tag{74}$$

Durch Grenzübergang $i \to \infty$ folgt nun (73) aus (74). □

Bemerkung 15.11 Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Polygonzug, so stimmt übrigens die in Definition 15.8 als ein Supremum definierte Weglänge mit der in (72) betrachteten überein.[26] Es genügt, dies für affin-lineare Wege γ zu beweisen, da wir durch wiederholte Anwendung von Lemma 15.10 die Weglänge eines Polygonzugs als Summe der Längen von affin-linearen Teilwegen schreiben können. Sei etwa

$$\gamma(t) = x + \frac{t-a}{b-a}(y-x) \quad \text{für } t \in [a,b]$$

mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = x + \frac{t_j - a}{b-a}(y-x) - x - \frac{t_{j-1}-a}{b-a}(y-x) = \frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}(y-x)$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$, somit

$$\begin{aligned} L_Z(\gamma) &= \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^m \left\| \frac{t_j - t_{j-1}}{b-a}(y-x) \right\| \\ &= \|y-x\| \frac{\sum_{j=1}^m (t_j - t_{j-1})}{b-a} = \|y-x\| \frac{b-a}{b-a} = \|y-x\|. \end{aligned}$$

Es ist also $L_Z(\gamma) = \|y-x\|$ für alle Zerlegungen Z und somit auch $L(\gamma) = \sup_Z L_Z(\gamma) = \|y-x\|$.

[26] In der Vorlesung überspringen wir den folgenden Beweis.

Weglänge von C^1-Wegen

Wir zeigen nun, dass jeder C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar ist und geben eine Formel für seine Weglänge an.

Satz 15.12 *Versehen wir $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$, so gilt: Jeder C^1-Weg $\gamma\colon [a,b] \to E$ ist rektifizierbar, mit Weglänge*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt. \tag{75}$$

Beweis. Es sei $(Z'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen Z'_k von $[a,b]$ derart, dass

$$L_{Z'_k}(\gamma) \to L(\gamma) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Die gemeinsame Verfeinerung von Z'_k mit einer äquidistanten Zerlegung von der Maschenweite $(b-a)/k$ liefert eine Zerlegung Z_k mit Maschenweite $\operatorname{mesh}(Z_k) \leq (b-a)/k$, so dass also

$$\operatorname{mesh}(Z_k) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty. \tag{76}$$

Da $L_{Z'_k}(\gamma) \leq L_{Z_k}(\gamma) \leq L(\gamma)$, folgt

$$L_{Z_k}(\gamma) \to L(\gamma) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir schreiben $\|\gamma'\|$ für die Funktion

$$\|\cdot\| \circ \gamma'\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|\gamma'(t)\|.$$

Ist B_k eine Belegung von Z_k, so gilt wegen (76)

$$S_{\|\gamma'\|}(Z_k, B_k) \to \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir zeigen, dass

$$L_{Z_k}(\gamma) - S_{\|\gamma'\|}(Z_k, B_k) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty. \tag{77}$$

Wenn das stimmt, so folgt

$$L_{Z_k}(\gamma) = L_{Z_k}(\gamma) - S_{\|\gamma'\|}(Z_k, B_k) + S_{\|\gamma'\|}(Z_k, B_k) \to 0 + \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

für $k \to \infty$. Da $L_{Z_k}(\gamma)$ für $k \to \infty$ auch gegen $L(\gamma)$ konvergiert, folgt (75).

Zum Nachweis von (77) sei $\varepsilon > 0$. Da γ' als Abbildung von $[a, b]$ nach $(E, \|\cdot\|)$ nach Satz 14.24 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(\forall s, t \in [a, b]) \quad |t - s| < \delta \;\Rightarrow\; \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Da $\operatorname{mesh}(Z_k) \to 0$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\operatorname{mesh}(Z_k) < \delta \quad \text{für alle } \; k \geq N.$$

Für $k \geq N$ sei Z_k die Zerlegung $a = t_0 < \cdots < t_m = b$ und $B_k = (s_1, \ldots, s_m)$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist dann $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ und somit für alle $t \in [t_{j-1}, t_j]$

$$|t - s_j| \leq t_j - t_{j-1} \leq \operatorname{mesh}(Z_k) < \delta,$$

folglich

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(s_j)\| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Da

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \quad \text{und} \quad (t_j - t_{j-1})\, \gamma'(s_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(s_j)\, dt,$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|L_{Z_k}(\gamma) - S_{\|\gamma'\|}(Z_k, B_k)| &= \left| \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| - \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) \|\gamma'(s_j)\| \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m} \left(\left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \right\| - \|(t_j - t_{j-1})\gamma'(s_j)\| \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left| \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt \right\| - \|(t_j - t_{j-1})\gamma'(s_j)\| \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt - (t_j - t_{j-1})\gamma'(s_j) \right\| \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)\, dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(s_j)\, dt \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t) - \gamma'(s_j)\|\, dt \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} (t_{j-1} - t_j)\, \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

wobei beim Übergang zur vierten Zeile Satz 7.10 (bzw. (47)) benutzt wurde. Somit gilt (77), was den Beweis beendet. □

Beispiel 15.13 Wir betrachten (wie in Beispiel 15.3 (a)) für $\alpha > 0$ den C^∞-Weg

$$\gamma\colon [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t),$$

der den Kreisbogen von $\gamma(0) = (1, 0)$ bis $\gamma(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ im Gegenuhrzeigersinn durchläuft. Nach Satz 15.12 hat γ bezüglich der euklidischen Norm die Weglänge

$$
\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^\alpha \|\gamma'(t)\|_2\, dt = \int_0^\alpha \|(-\sin t, \cos t)\|_2\, dt = \int_0^\alpha \underbrace{\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}}_{=1}\, dt \\
&= \int_0^\alpha 1\, dt = \alpha.
\end{aligned}
$$

Mit anderen Worten, wir können die Zahl α wirklich als eine Bogenlänge interpretieren, nämlich als die Länge des durch den Weg γ parametrisierten Kreisbogens von $(1, 0)$ bis $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Umparametrisieren von Wegen

Beim Umparametrisieren ändert sich die Länge von Wegen nicht:

Satz 15.14 *Wir versehen $E := \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$. Ist $\gamma\colon [a, b] \to E$ ein Weg und $\phi\colon [c, d] \to [a, b]$ ein Homöomorphismus, so ist*

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \phi).$$

Beweis. Wir wissen aus der Analysis 1, dass die bijektive stetige Abbildung $\phi\colon [c, d] \to [a, b]$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Ist $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[c, d]$ so ist

$$\phi(Z) = \{\phi(t_0), \phi(t_1), \dots, \phi(t_m)\}$$

eine Zerlegung von $[a, b]$. Ist Φ streng monoton wachsend, so ist $a = \phi(t_0) < \phi(t_1) < \cdots < \phi(t_m) = b$ und

$$L_{\phi(Z)}(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\phi(t_j)) - \gamma(\phi(t_{j-1}))\| = L_Z(\gamma \circ \phi).$$

Ist ϕ streng monoton fallend, so ist $b = \phi(t_0) > \phi(t_1) > \cdots > \phi(t_m) = a$, also $a = \phi(t_m) < \phi(t_{m-1}) < \cdots < \phi(t_0) = b$ die aufsteigende Anordnung der Punkte der Zerlegung $\phi(Z)$, somit ebenfalls

$$L_{\phi(Z)}(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\phi(t_j))-\gamma(\phi(t_{j-1}))\| = \sum_{j=1}^{m} \|\gamma(\phi(t_{j-1}))-\gamma(\phi(t_j))\| = L_Z(\gamma\circ\phi).$$

Sei nun $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ und $\mathcal{Z}'$ die Menge aller Zerlegungen von $[c, d]$. Dann ist

$$\mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}, \quad Z \mapsto \phi(Z)$$

eine bijektive Abbildung (mit Umkehrabbildung $Z \mapsto \phi^{-1}(Z)$), insbesondere also surjektiv. Es folgt

$$L(\gamma) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}} L_Z(\gamma) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}'} L_{\phi(Z)}(\gamma) = \sup_{Z\in\mathcal{Z}'} L_Z(\gamma \circ \phi) = L(\gamma \circ \phi). \qquad \square$$

Die Existenz einer schönen Umparametrisierung (wie im vorigen Satz) ist häufig automatisch:

Satz 15.15 *Sind $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ injektive Wege*[27] *mit gleichem Bild, also*

$$\gamma([a,b]) = \eta([c,d]),$$

so gibt es einen Homöomorphismus $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ derart, dass

$$\eta = \gamma \circ \phi.$$

Insbesondere gilt $L(\gamma) = L(\eta)$, d.h. die Bogenlänge

$$L(\Gamma) := L(\gamma)$$

der Menge $\Gamma := \gamma([a,b])$ ist wohldefiniert, unabhängig von der gewählten Parametrisierung γ.

Beweis. Sei $\Gamma := \gamma([a,b]) = \eta([c,d])$. Da $[c,d]$ kompakt ist und

$$\eta|^{\Gamma}\colon [c,d] \to \Gamma, \quad t \mapsto \eta(t)$$

stetig und bijektiv, ist $\eta|^{\Gamma}$ nach Satz dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz 14.15) ein Homöomorphismus. Ebenso ist $\gamma|^{\Gamma}\colon [a,b] \to \Gamma$ ein Homöomorphismus. Also ist auch $(\gamma|^{\Gamma})^{-1}\colon \Gamma \to [a,b]$ ein Homöomorphismus und somit auch die Komposition

$$\phi := (\gamma|^{\Gamma})^{-1} \circ \eta|^{\Gamma}\colon [c,d] \to [a,b].$$

Sei $\iota\colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ die Inklusion. Per Konstruktion ist $\gamma \circ \phi = \iota \circ \gamma|^{\Gamma} \circ \phi = \iota \circ \gamma|^{\Gamma} \circ (\gamma|^{\Gamma})^{-1} \circ \eta|^{\Gamma} = \iota \circ \eta|^{\Gamma} = \eta$. Die übrigen Aussagen folgen nun aus Satz 15.14. $\square$

Beispiel 15.16 Gegeben $\alpha \in]0, 2\pi[$ ist der Weg

$$\gamma\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t)$$

injektiv. Somit können wir dem Kreisbogen $\Gamma := \gamma([0,\alpha])$ die Bogenlänge $L(\Gamma) := L(\gamma) = \alpha$ zuordnen und wissen, dass wir für jede andere injektive Parametrisierung η des Kreisbogens[28] die gleiche Bogenlänge erhalten. Diese ist eine Eigenschaft von Γ allein, unabhängig von der Parametrisierung.

[27] Injektive Wege nennt man auch "einfache doppelpunktfreie Wege."

[28] Z.B. $\eta(t) = (1-t, \sqrt{1-(1-t)^2})$ falls $\alpha \leq \pi$.

Ableitung der Matrix-Exponentialfunktion

Wir zeigen den folgenden Satz:

Satz 15.17 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \mapsto e^{tA}$$

eine C^∞-Kurve mit

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Der Beweis benutzt das folgende Lemma (das man später als einen Spezialfall der Kettenregel auffassen könnte).

Lemma 15.18 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Kurve und $\alpha\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine stetige lineare Abbildung. Dann ist auch*

$$\alpha \circ \gamma\colon I \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \alpha(\gamma(t))$$

eine C^1-Kurve und es gilt

$$(\alpha \circ \gamma)'(t) = \alpha(\gamma'(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis. Sei $t \in I$. Für $s \neq t$ in I gilt

$$\frac{\alpha(\gamma(s)) - \alpha(\gamma(t))}{s-t} = \alpha\left(\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t}\right) \to \alpha(\gamma'(t))$$

für $s \to t$, wobei zuerst die Linearität von α benutzt wurde und dann die Stetigkeit von α. Also ist $\alpha\circ\gamma$ an der Stelle t differenzierbar mit $(\alpha\circ\gamma)'(t) = \alpha(\gamma'(t))$. Nach dem Vorigen ist $(\alpha\circ\gamma)' = \alpha\circ\gamma'$, wobei die rechte Seite stetig ist als Komposition stetiger Funktionen. Also ist $\alpha\circ\gamma$ eine C^1-Kurve. □

Beweis von Satz 15.17. Wir identifizieren $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$, indem wir die Matrix mit den Zeilen $(a_{11}\cdots a_{1n})$, …, $(a_{n1}\cdots a_{nn})$ identifizieren mit dem Element

$$(a_{11}, \ldots, a_{n1}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

von $\mathbb{R}^{n^2}$, also die Zeilenvektoren nacheinander auflisten. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$\mathrm{pr}_{ij}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

die lineare Abbildung, die einer Matrix $B = (b_{k\ell})_{k,\ell=1}^n$ ihren (i,j)-Eintrag b_{ij} zuordnet. Damit

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

eine C^∞-Kurve ist, haben wir zu zeigen, dass

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \mathrm{pr}_{ij}(e^{tA})$$

eine C^∞-Funktion ist für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Nach Satz 9.4 gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{pr}_{ij}(\gamma(t)) = \mathrm{pr}_{ij}(e^{tA}) = \mathrm{pr}_{ij}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} t^k A^k\right) = \sum_{k=0}^\infty \mathrm{pr}_{ij}\left(\frac{1}{k!} t^k A^k\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\, \mathrm{pr}_{ij}(A^k)\, t^k.$$

Somit ist $\mathrm{pr}_{ij} \circ \gamma$ die Grenzfunktion einer auf ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Potenzreihe und somit eine C^∞-Funktion (nach Folgerung 5.3), wie benötigt. Da Kurven komponentenweise abgeleitet werden und nach Satz 5.1 Potenzreihen gliedweise abgeleitet werden, gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{ij}(\gamma'(t)) &= (\mathrm{pr}_{ij} \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=0}^\infty (k+1) \frac{1}{(k+1)!}\, \mathrm{pr}_{ij}(A^{k+1}) t^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty \mathrm{pr}_{ij}\left(A(\frac{1}{k!} t^k A^k)\right), \end{aligned} \tag{78}$$

was sich auch als $\sum_{k=0}^\infty \mathrm{pr}_{ij}\left((\frac{1}{k!} t^k A^k) A\right)$ schreiben lässt. Nun ist

$$L_A\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \mapsto AB$$

eine lineare Abbildung und somit stetig. Mit Satz 9.4 erhalten wir

$$Ae^{tA} = L_A(e^{tA}) = L_A\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} t^k A^k\right) = \sum_{k=0}^\infty L_A\left(\frac{1}{k!} t^k A^k\right) = \sum_{k=0}^\infty A(\frac{1}{k!} t^k A^k)$$

mit (i,j)-Eintrag

$$\mathrm{pr}_{ij}(Ae^{tA}) = \sum_{k=0}^\infty \mathrm{pr}_{ij}\left(A(\frac{1}{k!} t^k A^k)\right).$$

Dieser stimmt mit der rechten Seite von (78) überein, so dass also $\gamma'(t) = Ae^{tA}$. Analog sieht man, dass $\gamma'(t) = e^{tA}A$. $\square$

16 Partiell differenzierbare reelle Funktionen

Wir betrachten zunächst reellwertige Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. In späteren Kapiteln wird dann auch Differentialrechnung für vektorwertige Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ entwickelt.

Partielle Ableitungen

Definition 16.1 Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar* an einer Stelle $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$, wenn die folgenden *partiellen Ableitungen* existieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1+t, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{t} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, x_2+t, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{t} \\
&\;\;\vdots \qquad\quad \vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m+t) - f(x_1, \ldots, x_m)}{t}.
\end{aligned}$$

Mit den Standard-Basisvektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ ist also

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} \tag{79}$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Bemerkung 16.2 Der Grenzwert in (79) ist ein Funktionenlimes; verlangt ist also, dass der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x+t_k e_j) - f(x)}{t_k}$$

existiert für jede Folge t_k in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ derart, dass $x+t_k e_j \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$. Der Grenzwert ist dann unabhängig von der Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und wir nennen ihn $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.

Was kann man sich unter partiellen Ableitungen vorstellen, wie rechnet man sie in der Praxis aus? Nach dem folgenden Rezept.

Bemerkung 16.3 Man erhält $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, indem man alle Variablen außer x_j (also $x_1, \ldots, x_{j-1}$ und $x_{j+1}, \ldots, x_m$) festhält und die so entstehende Funktion der einen Variablen x_j nach x_j ableitet, wie in der Analysis 1.

Begründung: Wenn wir

$$s_k := x_j + t_k$$

setzen, so ist $s_k \neq x_j$ und s_k in der Menge

$$J := \{s \in \mathbb{R} \colon (x_1, \ldots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \ldots, x_m) \in U\} \tag{80}$$

enthalten, die eine offene Umgebung von x_j in $\mathbb{R}$ ist (vergleiche Satz 12.10 (e)); weiter gilt

$$\lim_{k\to\infty} s_k = x_j. \tag{81}$$

Der Limes aus Bemerkung 16.2 ist dann gleich

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, s_k, x_{j+1}, \ldots, x_m) - f(x)}{s_k - x_j}.$$

Jede Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $J \setminus \{x_j\}$ mit (81) lässt sich auf diese Art erhalten: es ist $s_k = x_j + t_k$ mit $t_k := s_k - x_j$. Betrachten wir die Hilfsfunktion

$$h \colon J \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \ldots, x_m),$$

so existiert $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ also genau dann, wenn

$$h'(x_j) = \lim_{s\to x_j} \frac{h(s) - h(x_j)}{s - x_j}$$

existiert, und dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = h'(x_j).$$

Beispiel 16.4 Wir betrachten $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + 2\,x_2$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 1$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2.$$

Beispiel 16.5 Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1) + (x_2)^2$. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cos(x_1), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2\,x_2.$$

Bemerkung 16.6 Weitere Notationen für $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sind u.a.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x), \quad D_j f(x), \quad f_{x_j}(x).$$

Bemerkung 16.7 Manchmal benötigen wir die wie oben definierte partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ an einer Stelle $x \in U$ auch denn, wenn eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ nicht offen ist. Die obige Definition funktioniert, wann immer es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $x + t_k e_j \in U$ und

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0,$$

bzw. eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $J \setminus \{x_j\}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} s_k = x_j.$$

Zum Beispiel kann man problemlos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

definieren für eine Funktion $f\colon \ ]0,1[\ \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

Definition 16.8 Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $x \in U$, so nennen wir f *partiell differenzierbar*. Ist f partiell differenzierbar und sind die Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

für $j \in \{1, \ldots, m\}$ stetig, so nennt man f *stetig partiell differenzierbar* (oder kurz: eine *C^1-Funktion*).

Wir werden bald sehen (siehe 16.18), dass jede C^1-Funktion insbesondere stetig ist (also eine C^0-Funktion).

Beispiel 16.9 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 e^{x_2} + 2\,x_3$ ist stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = e^{x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 e^{x_2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 2$$

existieren nämlich und sind stetige Funktionen von $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Lokale Extremstellen und kritische Punkte

Wir interesseren uns für lokale Extremalstellen insbesondere von Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^m$.

Definition 16.10 Sei X ein topologischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in X$.

(a) x heißt *lokale Minimalstelle* von f (und $f(x)$ ein lokales Minimum), wenn es eine x-Umgebung $V \subseteq X$ derart gibt, dass

$$(\forall y \in V)\ f(x) \leq f(y).$$

Kann V so gewählt werden, dass $f(x) < f(y)$ für alle $y \in V \setminus \{x\}$, so heißt x eine *isolierte lokale Minimalstelle.*

(b) x heißt *lokale Maximalstelle* von f (und $f(x)$ ein lokales Maximum), wenn es eine x-Umgebung $V \subseteq X$ gibt derart, dass

$$(\forall y \in V)\ f(x) \geq f(y).$$

Kann V so gewählt werden, dass $f(x) > f(y)$ für alle $y \in V \setminus \{x\}$, so heißt x eine *isolierte lokale Maximalstelle.*

(c) x heißt *lokale Extremstelle* (und $f(x)$ ein lokales Extremum), wenn x eine lokale Minimalstelle oder eine lokale Maximalstelle ist.

Etwas unpräzise nennt man lokale Extremstellen oft ebenfalls *lokale Extrema.*

Lemma 16.11 *Es seien X und Y topologische Räume, $f\colon Y \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, $x \in X$ und $\eta\colon X \to Y$ eine Abbildung, die an der Stelle x stetig ist. Dann gilt:*

(a) *Ist $\eta(x)$ eine lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von f, so ist x eine lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von $f \circ \eta\colon X \to \mathbb{R}$.*

(b) *Ist $\eta(x)$ eine isolierte lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von f und η injektiv, so ist x eine isolierte lokale Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) von $f \circ \eta \colon X \to \mathbb{R}$.*

Beweis. Ist $\eta(x)$ eine lokale Minimalstelle von f, so existiert eine Umgebung V von $\eta(x)$ in Y derart, dass

$$(\forall y \in V) \;\; f(\eta(x)) \leq f(y). \tag{82}$$

Da η stetig ist, ist $\eta^{-1}(V)$ ene Umgebung von x in X. Für jedes $y \in \eta^{-1}(V)$ ist $\eta(y) \in V$ und somit $f(\eta(x)) \leq f(\eta(y))$ nach (82). Also ist x eine lokale Minimalstelle von $f \circ \eta$. Sei nun $\eta(x)$ eine isolierte Minimalstelle von f und V gewählt mit $f(z) > f(\eta(x))$ für alle $z \in V \setminus \{\eta(x)\}$. Da η injektiv ist, ist $\eta(y) \neq \eta(x)$ für alle $y \in \eta^{-1}(V) \setminus \{x\}$ und somit $f(\eta(y)) > f(\eta(x))$. Lokale Maximalstellen diskutiert man analog. □

Definition 16.12 Es sei $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir nennen $x \in U$ einen *kritischen Punkt* von f, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = 0.$$

Definition 16.13 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so definieren wir den *Gradienten* $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^m$ von f an der Stelle $x \in U$ als den Spaltenvektor der dortigen partiellen Ableitungen:

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Hierbei wir ∇ "Nabla" ausgesprochen. Statt $\nabla f(x)$ schreibt man auch $\operatorname{grad} f(x)$.

Es ist also $x \in U$ genau dann ein kritischer Punkt von f, wenn $\nabla f(x) = 0$ der Nullvektor ist.

Satz 16.14 (Notwendige Bedingung für Extremstellen). *Es sei $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ist $x \in U$ eine lokale Extremstelle von f, so ist $\nabla f(x) = 0$, also x ein kritischer Punkt von f.*

Beweis. Gegeben $j \in \{1, \dots, m\}$ sei J wie in (80). Dann ist

$$\eta\colon J \to U, \quad s \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

stetig (und injektiv). Nach der Diskussion in Bemerkung 16.3 ist

$$h := f \circ \eta\colon J \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_m)$$

an jeder Stelle $s \in J$ differenzierbar mit

$$h'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_m).$$

Da x_j nach Lemma 16.11 eine lokale Extremstelle von h ist, ist $0 = h'(x_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, wie aus der Analysis 1 bekannt. $\square$

Beispiel 16.15 Die Funktion

$$f\colon \,]-1, 1[\, \times \,\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\, \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (1 - x^2)\cos(y)$$

ist stetig differenzierbar mit

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x \cos y \\ -(1 - x^2) \sin y \end{pmatrix}.$$

Für einen kritischen Punkt (x, y) muss

$$-2x\cos(y) = 0 \quad \text{und} \quad (1 - x^2)\sin(y) = 0$$

gelten, also $x = 0$ und $y = 0$. Es ist also $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von f; nur dort kann eine lokale Extremstelle vorliegen.

In der Tat $f(0, 0) = 1$ das globale Maximum für f, denn für alle (x, y) im Definitionsbereich ist $0 < (1 - x^2) \leq 1$ und $0 < \cos(y) \leq 1$, somit

$$0 < (1 - x^2)\cos(y) \leq 1.$$

Affin-lineare Approximation

Analog dazu, wie die Tangente eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ approximiert, können wir stetig partiell differenzierbare Funktionen um eine Stelle x approximieren durch eine affin-lineare Funktion.

16.16 Im folgenden Satz benutzen wir das Standard-Skalarprodukt zweier Spaltenvektoren $v = (v_1, \dots, v_m)^T$ und $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ in $\mathbb{R}^m$,

$$v \cdot w := \langle v, w\rangle := \sum_{j=1}^{m} v_j w_j.$$

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w$$

ist bilinear. Insbesondere ist für jeden festen Vektor v die Abbildung

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto v \cdot w$$

linear.

Satz 16.17 *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $x \in U$, so setzen wir*

$$R(y) := f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x)$$

für $y \in U$, so dass also

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) + R(y) \qquad (83) \\ &= f(x) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j) + R(y). \end{aligned}$$

Für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{\|y - x\|} = 0.$$

Bevor wir den Satz beweisen, halten wie eine erste Anwendung fest:

Folgerung 16.18 *Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Beweis. An jeder Stelle $x \in U$ ist f stetig, denn es gilt

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x) \cdot \underbrace{(y-x)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{R(y)}{\|y-x\|}}_{\to 0} \underbrace{\|y-x\|}_{\to 0} \to f(x)$$

für $y \in U \setminus \{x\}$ mit $y \to x$. □

Zum Beweis von Satz 16.17 beginnen wir mit einer Vorüberlegung. Sei $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$ und $\varepsilon > 0$ derart, dass $x + t\, e_1 \in U$ für alle $t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$. Für jedes $t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$ ist dann

$$f(x_1 + t, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, x_2, \ldots, x_m)\, t \qquad (84)$$

für ein ξ zwischen x_1 und $x_1 + t$. Für $t = 0$ sind nämlich beide Seiten 0 mit $\xi := x_1$. Ist $t \neq 0$, betrachten wir $x_2, \ldots, x_m$ als Konstanten, so dass also $s \mapsto f(s, x_2, \ldots, x_m)$ eine differenzierbare Funktion der reellen Variablen $s \in [x_1, x_1{+}t]$ (bzw. $s \in [x_1{+}t, x_1]$, wenn $t < 0$) ist. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist die Sekantensteigung gleich der Tangentensteigung an einer Zwischenstelle ξ zwischen x_1 und $x_1 + t$, also

$$\frac{f(x_1 + t, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, x_2, \ldots, x_m).$$

Multiplizieren mit t liefert (84).

Setzen wir $\tau := \xi - x_1$, so ist $\xi = x_1 + \tau$ und

$$f(x + te_1) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + \tau e_1)\, t$$

für ein τ zwischen 0 und t. Analog sehen wir, dass für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$f(x + te_j) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \tau e_j)\, t$$

für ein τ zwischen 0 und t, wenn $x + se_j \in U$ für alle $s \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Beweis für Satz 16.17. Da auf $\mathbb{R}^m$ alle Normen äquivalent sind, existiert eine Konstante $C > 0$ derart, dass

$$\|z\| \geq C\|z\|_\infty \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^m.$$

Gegeben $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq U$, so dass also
$$]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\, \times \cdots \times \,]x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon[\, \subseteq U.$$
Weiter ist laut Vorüberlegung

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \sum_{k=1}^m \left(f\left(x + \sum_{j=1}^k (y_j - x_j) e_j \right) - f\left(x + \sum_{j=1}^{k-1} (y_j - x_j) e_j \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left(f\left(x + \sum_{j=1}^{k-1} (y_j - x_j) e_j + (y_k - x_k) e_k \right) - f\left(x + \sum_{j=1}^{k-1} (y_j - x_j) e_j \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(x + \sum_{j=1}^{k-1} (y_j - x_j) e_j + \tau_k e_k \right) (y_k - x_k) \qquad (85) \end{aligned}$$

mit Zahlen τ_k zwischen 0 und $y_k - x_k$, so dass also $\tau_k \to 0$ für $y \to x$. Für $y \in \,]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\, \times \,]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[$ ist nach (85) dann

$$f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \left(x + \sum_{j=1}^{k-1} (y_j - x_j) e_j + \tau_k e_k \right) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right) (y_k - x_k).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{R(y)}{\|y - x\|} \right| &= \left| \frac{f(y) - f(x) - (y - x) \cdot \nabla f(x)}{\|y - x\|} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(x + \sum_{j=1}^{k-1} (y_j - x_j) e_j + \tau_k e_k \right) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right|}_{\to 0} \underbrace{\frac{|y_k - x_k|}{\|y - x\|_\infty}}_{\leq 1} \frac{1}{C} \to 0 \end{aligned}$$

für $y \to x$ und folglich $\frac{R(x)}{\|y - x\|} \to 0$. $\square$

Richtungsableitungen

Um die partiellen Ableitungen zu erhalten, haben wir in Richtung der Standard-Basisvektoren $e_1, \dots, e_m$ abgeleitet. Es ist sehr natürlich, auch in andere Richtungen abzuleiten.

Satz 16.19 *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so existiert für jedes $x \in U$ und jedes $v \in \mathbb{R}^m$ der Grenzwert*

$$(D_v f)(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

und lässt sich mit Hilfe des Standard-Skalarprodukts berechnen als

$$(D_v f)(x) = \nabla f(x) \cdot v.$$

Dann ist also $(D_v f)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+tv)$. Man nennt $(D_v f)(x)$ die *Richtungsableitung* von f an der Stelle x in der Richtung v.

Beweis. Ist $v = 0$, so sind alle Differenzenquotienten, die Richtungsableitung und das Skalarprodukt 0.

Ist $v \neq 0$, so setzen wir für $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $x + tv \in U$ den Vektor $y := x + tv$ (mit $y - x = tv$) in (83) ein und erhalten nach Division durch t:

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \nabla f(x) \cdot v + \frac{R(x+tv)}{t}. \tag{86}$$

Da

$$\frac{R(x+tv)}{t} = \frac{R(x+tv)}{\|tv\|}\|v\| \to 0$$

für $t \to 0$, strebt die rechte Seite von (86) gegen $\nabla f(x) \cdot v$. □

Der Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs

Man kann den Gradienten als die *Richtung des steilsten Anstiegs* interpretieren. Befindet man sich an der Stelle $x \in U$ und bewegt sich in U in Richtung des Gradienten, so wächst die Funktion f am schnellsten.

Ist etwa $f(x,y)$ die Höhe der Bergoberfläche über dem Punkt (x,y) in der Ebene, so kommen Sie am schnellsten bergauf, wenn Sie sich in Richtung $\nabla f(x,y)$ bewegen.

Im folgenden Satz ist $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm (2-Norm) auf $\mathbb{R}^m$.

Satz 16.20 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $x \in U$. Ist $\nabla f(x) \neq 0$, so wird das Maximum*

$$\max\{(D_v f)(x)\colon v \in \mathbb{R}^n \textit{ mit } \|v\|_2 = 1\}$$

genau für

$$v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

angenommen.

Analog ist $-\nabla f(x)$ die Richtung des steilsten Abstiegs.

Zum Nachweis brauchen wir Information darüber, wann in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung Gleichheit auftritt:

Lemma 16.21 *Sind $u, v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ und ist*

$$|u \cdot v| = \|u\|_2 \|v\|_2 = \|u\|_2,$$

so ist u ein Vielfaches von v.

Beweis. Setzen wir $u_\| := (u \cdot v)v$ und $u_\perp := u - u_\|$, so ist $u = u_\| + u_\perp$. Wegen

$$u_\| \cdot u_\perp = (u \cdot v)v \cdot u_\perp = (u \cdot v)(v \cdot u) - (u \cdot v)v \cdot (u \cdot v)v = |u \cdot v|^2 - |u \cdot v|^2 (\|v\|_2)^2 = 0$$

sind die Vektoren $u_\|$ und $u_\perp$ orthogonal. Ist u kein Vielfaches von v und somit $u_\perp \neq 0$, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$(\|v\|_2)^2 = (\|v_\|\|_2)^2 + (\|v_\perp\|_2)^2 > (\|v_\|\|_2)^2.$$

Wegen

$$v \cdot u = v \cdot u_\| + \underbrace{v \cdot u_\perp}_{=0} = v \cdot u_\|$$

folgt

$$|v \cdot u| = |v \cdot u_\|| \leq \|v\|_2 \|u_\|\| = \|u_\|\|_2 < \|u\|_2.$$

□

Beweis für Satz 16.20. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist für jedes $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$

$$v \cdot \nabla f(x) \leq |v \cdot \nabla f(x)| \leq \|v\|_2 \|\nabla f(x)\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2.$$

Die obere Schranke wird auch angenommen, denn mit $u := \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$ ist

$$u \cdot \nabla f(x) = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|_2} \nabla f(x) \cdot \nabla f(x) = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|_2} (\|\nabla f(x)\|_2)^2 = \|\nabla f(x)\|_2.$$

Analog wird für $-u$ das Minimum

$$(-u) \cdot \nabla f(x) = -\|\nabla f(x)\|_2$$

angenommen. Ist v weder $+u$ noch $-u$, so ist der Einheitsvektor v kein Vielfaches des Einheitsvektors u und somit nach Lemma 16.21

$$|u \cdot v| < 1,$$

also $u \cdot \nabla f(x) \leq |u \cdot \nabla f(x)| < \|\nabla f(x)\|_2$.

Beispiel 16.22 Ein Käfer befindet sich an der Stelle $(1, 0)$ auf der Herdplatte

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 16\}$$

vom Radius 4 cm. Die Temperatur an der Stelle (x, y) sei

$$T(x, y) = 40 - x^2 - y^2.$$

In welcher Richtung sollte er davonkrabbeln, damit es auf die Dauer nicht zu heiß wird?

Antwort: In die Richtung $-\nabla T(1, 0)$ des steilsten Abstiegs. Es ist $\nabla T(x, y) = (-2x, -2y)$, somit $-\nabla T(1, 0) = (2, 0)$. Der Käfer sollte sich also radial nach außen bewegen, längs der x-Achse.

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale

Ableitungen nach Parametern und Integration können vertauscht werden, man kann "unter dem Integralzeichen ableiten":

Satz 16.23 (Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale) *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a < b$ reelle Zahlen und*

$$f \colon I \times [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (s, t) \mapsto f(s, t)$$

eine stetige Funktion derart, dass $\frac{\partial f}{\partial s} \colon I \times [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist. Dann ist

$$g \colon I \to \mathbb{R}, \quad g(s) := \int_a^b f(s, t)\, dt$$

eine C^1-Funktion und

$$\frac{dg}{ds}(s) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s, t)\, dt, \tag{87}$$

also $\frac{d}{ds}\int_a^b f(s,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass I ein Intervall ist. Für jedes $t \in [a,b]$ ist

$$h\colon I \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto f(s,t)$$

differenzierbar mit $h'(s) = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)$, nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung somit für alle $r, s \in I$

$$\begin{aligned} f(r,t) - f(s,t) &= h(r) - h(s) = \int_s^r h'(u)\,du = (r-s)\int_0^1 h'(s+\sigma(r-s))\,d\sigma \\ &= (r-s)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma. \end{aligned}$$

wobei noch $u = s + \sigma(r-s)$ mit $\sigma \in [0,1]$ und $du = (r-s)\,d\sigma$ substituiert wurde. Gegeben $r, s \in I$ mit $r \neq s$ ist also

$$\begin{aligned} \frac{g(r)-g(s)}{r-s} &= \frac{1}{r-s}\left(\int_a^b f(r,t)\,dt - \int_a^b f(s,t)\,dt\right) \\ &= \int_a^b \frac{f(r,t)-f(s,t)}{r-s}\,dt \\ &= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma\right)dt. \end{aligned} \tag{88}$$

Da die Funktion

$$I \times [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (r,t,\sigma) \mapsto \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)$$

stetig ist, ist nach Satz 14.22 (über die Stetigkeit parameterabhängiger Integrale) die Funktion

$$h\colon I \times [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(r,t) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma$$

stetig. Diese erfüllt

$$h(s,t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\underbrace{\sigma(s-s)}_{=0},t)\,d\sigma = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,d\sigma = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t). \tag{89}$$

Nochmalige Anwendung des Satzes liefert die Stetigkeit der Abbildung

$$\Delta\colon I \to \mathbb{R}, \quad \Delta(r) := \int_a^b h(r,t)\,dt \;=\; \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s+\sigma(r-s),t)\,d\sigma \right) dt.$$

Diese erfüllt wegen (89)

$$\Delta(s) = \int_a^b h(s,t)\,dt \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt. \tag{90}$$

Nun gilt nach (88) für $r \in I \setminus \{s\}$

$$\frac{g(r)-g(s)}{r-s} = \Delta(r) \to \Delta(s) \;=\; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)\,dt$$

für $r \to s$, wobei die Stetigkeit von Δ benutzt wurde und dann (90). Also gilt (87). $\square$

Mittelwertsatz in Integralform

Wir zeigen eine Fassung des Mittelwertsatzes für reellwertige Funktionen in mehreren Variablen.

Satz 16.24 *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $x = (x_1,\ldots,x_m)$ sowie $y = (y_1,\ldots,y_m)$ Punkte in U, deren Verbindungsstrecke ganz in U liegt, also $x + t(y-x) \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt*

$$f(y)-f(x) = \int_0^1 \rangle \nabla f(x+t(y-x)), y-x\rangle\,dt = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+t(y-x))(y_j-x_j)\,dt.$$

Beweis. Es ist $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) := f(x+t(y-x))$ eine stetige Funktion und differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = (D_{y-x}f)(\gamma(t)) = \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x\rangle = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+t(y-x))(y_j-x_j),$$

denn für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]\setminus\{t\}$ mit $t_n \to t$ für $n \to \infty$ gilt $s_n := t_n - t \to 0$ und

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(t_n)-\gamma(t)}{t_n-t} &= \frac{f(x+t(y-x)+s_n(y-x)) - f(x+t(y-x))}{s_n} \\ &\to D_{y-x}f(x+t(y-x)) = D_{y-x}f(\gamma(t))\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Insbesondere ist $\gamma'\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ stetig, also γ ein C^1-Weg. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist somit

$$f(y) - f(x) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)\, dt.$$

Einsetzen von $\gamma'(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y - x\rangle$ bzw.

$$\gamma'(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + t(y-x))(y_j - x_j)$$

für den Integranden liefert die Behauptung. □

Erste Fassung der Kettenregel

Wir beweisen eine erste Fassung der Kettenregel, für die Verknüpfung einer skalarwertigen C^1-Funktionen mit einem C^1-Weg.

Satz 16.25 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Seien weiter $a < b$ reelle Zahlen und $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ein C^1-Weg mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$. Dann ist die Funktion*

$$f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\gamma(t))$$

stetig differenzierbar und

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

für alle $t \in [a,b]$, also

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\, \gamma_j'(t).$$

Beweis. Sei $t \in [a,b]$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b] \setminus \{t\}$, die für $n \to \infty$ gegen t konvergiert. Wir benutzen die affin-lineare Approximation

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + R(y)$$

von f an der Stelle $x = \gamma(t)$. Mit $y = \gamma(t_n)$ erhalten wir

$$f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(x), \gamma(t_n) - \gamma(t)\rangle + R(\gamma(t_n)).$$

Teilen durch $t_n - t$ liefert

$$\frac{f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t))}{t_n - t} = \langle \nabla f(x), \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t)}{t_n - t} \rangle + \frac{R(\gamma(t_n))}{t_n - t}.$$

Der Differenzenquotient hinter dem Gradienten konvergiert gegen $\gamma'(t)$ für $n \to \infty$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $R(\gamma(t_n))/(t_n - t) \to 0$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$. Die gegen $\|\gamma'(t)\|$ konvergente Zahlenfolge

$$\left\| \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t)}{t_n - t} \right\|$$

ist beschränkt; es gibt also ein $M \geq 0$ derart, dass

$$\left\| \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t)}{t_n - t} \right\| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\frac{|R(z)|}{\|z - x\|} \leq \frac{\varepsilon}{M + 1}$$

für alle $z \in U$ mit $z \neq x$ und $\|z - x\| < \delta$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|\gamma(t_n) - \gamma(t)\| < \delta$$

für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann also

$$\frac{|R(\gamma(t_n))|}{|t_n - t|} \leq \frac{\varepsilon}{M + 1} \frac{\|\gamma(t_n) - \gamma(t)\|}{|t_n - t|} \leq \varepsilon \frac{M}{M + 1} < \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{R(t_n)}{t_n - t} = 0$. □

Analoges gilt natürlich für C^1-Kurven $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^m$ auf einem nicht entarteten Intervall I an Stelle von $[a, b]$, mit identischem Beweis.

17 Zweite Ableitungen, Taylorentwicklung und lokale Extrema

In diesem Kapitel untersuchen wir zweite partielle Ableitungen einer reellwertigen Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Diese lassen sich in einer Matrix anordnen, der sogenannten Hessematrix. Wir diskutieren dann Taylor-Entwicklung für zweimal stetig differenzierbare Funktionen und benutzen diese im Beweis von hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema.

Zweite Ableitungen und Hesse-Matrix

Definition 17.1 Ist f partiell differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen von f ebenfalls Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon U \to \mathbb{R}$$

auf der offenen Menge U. Sind all diese partiell differenzierbar, nennen wir f *zweimal* partiell differenzierbar. Sind $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig, die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon U \to \mathbb{R}$ stetig für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ und die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f$$

stetig für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, so nennt man f *zweimal stetig partiell differenzierbar* (oder kurz: eine C^2-Funktion).

Statt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ schreibt man meist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Beispiel 17.2 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 \sin(x_2)$ ist partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \sin(x_2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 \cos(x_2).$$

Diese partiellen Ableitungen sind ebenfalls wieder partiell differenzierbar. Ableiten nach x_1 liefert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \cos(x_2).$$

Ableiten der ersten partiellen Ableitungen nach x_2 liefert

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = \cos(x_2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = -x_1 \sin(x_2).$$

Da f, alle ersten partiellen Ableitungen und alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, ist f eine C^2-Funktion.

Beachten Sie, dass im vorigen Beispiel die gemischten zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x)$$

gleich sind: beide sind $\cos(x_2)$. Das ist kein Zufall; allgemein gilt:

Satz 17.3 (Satz von Schwarz). *Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, so gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Beweis. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$ existiert ein $r > 0$ mit

$$]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_m - r, x_m + r[= B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq U.$$

Seien $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$. Da beim partiellen Ableiten nach x_i und x_j all die anderen Variablen festgehalten werden, genügt es, den Fall $m = 2$ zu diskutieren und eine C^2-Funktion

$$f\colon\ ]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\to \mathbb{R}$$

zu betrachten mit reellen $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$. Sei $x_2 \in]a_2, b_2[$ und $y_2 \in]a_2, b_2[$ mit $y_2 \neq x_2$. Für jedes $x_1 \in]a_1, b_1[$ ist dann

$$\frac{f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)}{y_2 - x_2} = \int_{x_2}^{y_2} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, s)}{y_2 - x_2}\, ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))\, dt. \tag{91}$$

Hierbei wurde bei festgehaltener erster Variable der Hauptsatz benutzt und dann $s = x_2 + t(y_2 - x_2)$, $ds = (y_2 - x_2)\, dt$ substituiert. Ableiten von (91) nach x_1 liefert

$$\Delta_{y_2} := \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{y_2 - x_2} = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))\, dt. \tag{92}$$

Der Differenzenquotient in (92) ergibt sich dabei direkt aus dem in (91) durch partielles Ableiten nach x_1. Partielles Ableiten des rechten Integrals in (91) liefert nach Satz 16.23 das Integral in (92); die Ableitung darf ins Integral gezogen werden. Betrachtung des Differenzenquotienten in (92) zeigt, dass

$$\lim_{y_2 \to x_2} \Delta_{y_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2). \tag{93}$$

Nun ist aber

$$h\colon\ ]a_2, b_2[\, \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (y_2, t) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))$$

eine stetige Funktion. Nach Satz 14.22 ist somit

$$g\colon\ ]a_2, b_2[\, \to \mathbb{R}, \quad y_2 \mapsto \int_0^1 h(y_2, t)\, dt$$

stetig. Man beachte, dass $h(x_2, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$ für alle $t \in [0,1]$ und somit $g(x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$. Die Integraldarstellung aus (92) liefert

$$\Delta_{y_2} = \int_0^1 h(y_2, t)\, dt = g(y_2)$$

für alle $y_2 \in\,]a_2, b_2[$ mit $y_2 \neq x_2$. Da g stetig ist, folgt

$$\lim_{y_2 \to x_2} \Delta_{y_2} = \lim_{y_2 \to x_2} g(y_2) = g(x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2). \tag{94}$$

Vergleich von (93) und (94) liefert die Gleichheit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen. $\square$

Definition 17.4 Nach dem Satz von Schwarz ist für jede C^2-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ für jedes $x \in U$ die $m \times m$-Matrix

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x) \end{pmatrix}$$

der zweiten partiellen Ableitungen eine *symmetrische* Matrix. Man nennt $H_f(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die *Hesse-Matrix* von f.

Beispiel 17.5 Im vorigen Beispiel ist

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(x_2) \\ \cos(x_2) & -x_1 \sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

Taylorentwicklung 2. Ordnung

Auch für Funktionen in mehreren Variablen ist Taylorentwicklung möglich, ähnlich zur Theorie in einer Variablen aus Kapitel 4. Wir beschränken uns auf den Fall der Taylorentwicklung 2. Ordnung. Diese wird uns ermöglichen, eine hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen zu beweisen.

Satz 17.6 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ und $x \in U$. Für das Restglied $R(y)$ in*

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2}\langle y - x, H_f(x)(y - x) \rangle + R(y) \qquad (95)$$

gilt dann

$$\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{\|y - x\|^2} \;=\; 0.$$

Beweis. Es gibt ein $C > 0$ derart, dass $\|z\| \geq C\|z\|_\infty$ für alle $z \in \mathbb{R}^m$. Für ein $r > 0$ enthält U die Kugel $B_r(x)$ bezüglich $\|\cdot\|$. Für $y \in B_r(x)$ betrachten wir die stetige Funktion

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x + t(y - x)).$$

Diese ist differenzierbar: Für jedes $t \in [0,1]$ ist

$$h'(t) = D_{y-x} f(x + t(y - x))$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle $x + t(y - x)$ in der Richtung $y - x$. Nach Satz 16.19 ist also

$$h'(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + t(y - x))(y_j - x_j). \qquad (96)$$

Diese Funktion kann erneut nach t abgeleitet werden; wir erhalten wieder eine Richtungsableitung, nämlich

$$\begin{aligned} h''(t) &= \sum_{j=1}^{m} \left\langle \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x+t(y-x)), y-x \right\rangle (y_j - x_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+t(y-x))(y_i-x_i)(y_j-x_j) && (97) \\ &= \langle y-x, H_f(x+t(y-x))(y-x)\rangle; && (98) \end{aligned}$$

der zweiten Zeile sehen wir an, dass $h''(t)$ eine stetige Funktion von t ist. Taylorapproximation zweiter Ordnung für h liefert

$$h(1) = h(0) + h'(0)(1-0) + \frac{1}{2}h''(0)(1-0)^2 + R_2(1) \tag{99}$$

mit dem Restglied

$$R_2(1) = \int_0^1 (1-t)(h''(t) - h''(0))\, dt, \tag{100}$$

siehe Bemerkung 4.11 (b). Nun ist $h(0) = f(x)$ und $h(1) = f(y)$. Setzen wir dies in (99) ein sowie $h'(0)$ aus (96) und $h''(0)$ aus (98), so erhalten wir (95) mit

$$R(y) = R_2(1) = \int_0^1 (1-t) \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+t(y-x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) (y_i - x_i)(y_j - x_j)\, dt$$

wobei (97) in (100) eingesetzt wurde mit dem gegebenen t sowie mit $t = 0$ (so dass $x + t(y-x) = x$). Wir benutzen nun, dass die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, finden wir also ein $\delta \in \,]0, r]$ derart, dass für alle $z \in B_\delta(x) \subseteq \mathbb{R}^m$ und $i, j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| < \frac{C^2 \varepsilon}{m^2}.$$

Für alle $y \in B_\delta(x)$ ist $z = x + t(y-x) \in B_\delta(x)$ für alle $t \in [0,1]$. Wir schließen, dass

$$\begin{aligned} |R(y)| &\le \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{\le 1} \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+t(y-x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|}_{\le C^2\varepsilon/m^2} |y_i - x_i|\, |y_j - x_j|\, dt \\ &\le \sum_{i,j=1}^{m} \frac{C^2 \varepsilon}{m^2} |y_i - x_i|\, |y_j - x_j| \le \sum_{i,j=1}^{m} \frac{C^2\varepsilon}{m^2} (\|y-x\|_\infty)^2 = C^2 \varepsilon\, (\|y-x\|_\infty)^2, \end{aligned}$$

wobei $|y_i - x_i| \leq \|y - x\|_\infty$ benutzt wurde. Also ist

$$\frac{|R(y)|}{\|y-x\|^2} \leq \frac{|R(y)|}{C^2(\|y-x\|_\infty)^2} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } y \neq x \text{ mit } \|y-x\| < \delta$$

und somit $\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{\|y-x\|^2} = 0$ gezeigt. □

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Für stetig differenzierbare reellwertige Funktionen auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ wissen wir bereits, dass jede lokale Extremstelle notwendig ein kritischer Punkt der Funktion ist (siehe Satz 16.14). Umgekehrt hätten wir gern hinreichende Bedingungen, die garantieren, dass ein kritischer Punkt eine lokale Minimalstelle bzw. Maximalstelle ist.

Beispiel 17.7 Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \cos(x) - y^2$ ist C^1 (sogar C^∞) und hat als Gradienten

$$\nabla f(x, y) = (-\sin(x), -2y)^t.$$

Dieser ist genau dann 0, wenn $0 = \sin x$ und $y = 0$, also wenn $x \in \pi\mathbb{Z}$ und $y = 0$. Welche der Punkte $(x, y) \in \pi\mathbb{Z} \times \{0\}$ sind lokale Extremalstellen? Wir könnten von Hand die Frage beantworten und unsere Funktion sehr genau anschauen. Jedoch gibt hier auch die folgende allgemeine Theorie eine vollständige Antwort (siehe Beispiel 17.12).

Definition 17.8 Eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *positiv semidefinit*, wenn sie symmetrisch ist (also $A = A^t$) und

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n) \;\; \langle y, Ay \rangle \geq 0.$$

Ist A positiv semidefinit und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so wird A *positiv definit* genannt. Ist $-A$ positiv semidefinit, so heißt A *negativ semidefinit*; ist $-A$ positiv definit, so heißt A *negativ definit*.

Satz 17.9 *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A nicht-negativ sind.*

(b) *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.*

(c) *Ist A positiv definit und $\rho > 0$ der kleinste Eigenwert von A, so gilt*

$$\langle y, Ay \rangle \geq \rho(\|y\|_2)^2 \quad \textit{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. (a) Ist $0 \neq y$ ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $\lambda < 0$, so ist

$$\langle y, Ay \rangle = \langle y, \lambda y \rangle = \lambda \langle y, y \rangle = \lambda(\|y\|_2)^2 < 0,$$

also A nicht positiv semidefinit. Ist A positiv semidefinit, so sind also alle Eigenwerte ≥ 0. Sei nun A eine symmetrische Matrix derart, dass alle Eigenwerte nicht negativ sind. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von Eigenvektoren gibt. Dann ist also

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j; \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $Av_i = \lambda_i v_i$ mit Eigenwerten $\lambda_i \geq 0$. Gegeben $y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir y als Linearkombination der Eigenvektoren:

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

mit eindeutigen $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle y, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i v_i, y_j \underbrace{Av_j}_{=\lambda_j v_j} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j y_i y_j \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i)^2 \geq 0.$$

(b) und (c): Ist A positiv definit, so sind nach (a) alle Eigenwerte ≥ 0 und somit > 0, weil A invertierbar (und somit der zugehörige Endomorphismus bijektiv, also injektiv) ist. Nun sei A eine symmetrische Matrix derart, dass alle Eigenwerte > 0 sind. Sei ρ der kleinste Eigenwert. Mit Notationen wie im Beweis von (a) ist dann für alle $y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle y, Ay \rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq \rho} (y_i)^2 \geq \rho \sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 = \rho(\|y\|_2)^2.$$

Die in (c) verlangte Abschätzung ist also erfüllt. Weiter ist A positiv semidefinit und $Ay \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Der zugehörige Endomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto Ay$ ist also injektiv, ergo bijektiv und somit A invertierbar. □

Wir benutzen ein Resultat über Funktionen einer reellen Variable, das meist in der Analysis 1 behandelt wird:

Lemma 17.10 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $x \in I$ ein kritischer Punkt. Ist $f''(x) < 0$, so ist x eine isolierte lokale Maximalstelle und somit keine lokale Minimalstelle von f.*

Beweis. Sei R_2 das Restglied der Taylorentwicklung 2. Ordnung von f um die Stelle x. Es existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $]x-\delta, x+\delta[\, \subseteq I$ und

$$|R_2(t)| \leq \frac{1}{4}|f''(x)|\,(t-x)^2 = -\frac{1}{4}f''(x)\,(t-x)^2$$

für alle $t \in]x-\delta, x+\delta[$. Für alle $t \in]x-\delta, x+\delta[\,\setminus\{x\}$ ist dann

$$\begin{aligned} f(t) &= f(x) + \underbrace{f'(x)}_{=0}(t-x) + \frac{1}{2}f''(t)(t-x)^2 + R_2(y) \\ &\leq f(x) + \frac{1}{2}f''(t)(t-x)^2 - \frac{1}{4}f''(x)(t-x)^2 \\ &= f(x) + \frac{1}{4}f''(x)(t-x)^2 < f(x); \end{aligned}$$

also ist x ein isolierte lokale Maximalstelle und keine lokale Minimalstelle von f. □

Satz 17.11 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $x \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann gilt:*

(a) *Ist x eine lokale Minimalstelle von f, so ist die Hessematrix $H_f(x)$ an der Stelle x positiv semidefinit.*

(b) *Ist $H_f(x)$ positiv definit, so ist x eine isolierte lokale Minimalstelle von f.*

(c) *Ist x eine lokale Maximalstelle von f, so ist $H_f(x)$ negativ semidefinit.*

(d) *Ist $H_f(x)$ negativ definit, so ist x eine isolierte lokale Maximalstelle von f.*

(e) *Besitzt $H_f(x)$ mindestens einen positiven Eigenwert und mindestens einen negativen Eigenwert, so ist x keine lokale Extremalstelle von f.*

Beweis. (a) Ist x eine lokale Minimalstelle von f, so ist für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ die Zahl 0 eine lokale Minimalstelle der C^2-Funktion $f \circ \eta\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $\eta(t) := x + ty \in U$ für alle $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Nach Lemma 17.10 ist dann $(f \circ \eta)''(0) \geq 0$. Somit ist

$$0 \leq (f \circ \eta)''(0) = \langle y, H_f(x)y \rangle,$$

analog zur Rechnung vor (98), nun mit y statt $y - x$. Also ist $H_f(x)$ positiv semidefinit.

(b) Ist $H_f(x)$ positiv definit, so sei $\rho > 0$ der kleinste Eigenwert. Nach Satz 17.6 gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq U$ und

$$|R(y)| \leq \frac{1}{4}\rho(\|y - x\|_2)^2 \quad \text{für alle } y \in B_\delta(x),$$

wobei die Kugel sich auf die euklidsche Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezieht. Für alle $y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$ ist dann

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(x) + \underbrace{f'(x)(y-x)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle y - x, H_f(x)(y-x)\rangle}_{\geq \rho(\|y-x\|_2)^2} + R(y) \\
&\geq f(x) + \frac{1}{2}\rho(\|y-x\|_2)^2 + R(y) \geq f(x) + \frac{1}{2}\rho(\|y-x\|_2)^2 - |R(y)| \\
&\geq f(x) + \frac{1}{2}\rho(|y-x\|_2)^2 - \frac{1}{4}\rho(\|y-x\|_2)^2 = f(x) + \frac{1}{4}\rho(\|y-x\|_2)^2 > f(x),
\end{aligned}$$

wobei Satz 17.9(c) für die erste Abschätzung benutzt wurde. Also ist x eine isolierte lokale Minimalstelle von f.

(c) und (d) folgen aus (a) und (b), angewandt auf $-f$.

(e) folgt aus (a), (c) und Satz 17.9. $\square$

Beispiel 17.12 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 17.7 hat Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da diese diagonal ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und wir können somit sofort ablesen, an welchen kritischen Punkten die Hessematrix positiv definit bzw. negativ definit ist. Für $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ und $y = 0$ ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

negativ definit, denn die Egenwerte -1 und -2 sind beide negativ. Nach Satz 17.11(d) ist also $(x, 0)$ eine isolierte lokale Maximalstelle von f.

Ist $x = (2k + 1)\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $y = 0$, so hat

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

eine positiven Eigenwert (nämlich 1), und einen negativen Eigenwert, -2. Nach Satz 17.11(e) ist also $(x, 0)$ keine lokale Extremalstelle von f.

Beispiel 17.13 Gegeben $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachten wir die C^∞-Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \alpha x^2 + \beta y^2$$

mit $\nabla f(x,y) = (2\alpha x, 2\beta y)^t$, welche $(0,0)$ als (einzigen) kritischen Punkt besitzt. Da

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten α und β, ist $(0,0)$ genau dann eine lokale Minimalstelle, wenn $\alpha, \beta > 0$; weiter ist $(0,0)$ genau dann eine lokale Maximalstelle, wenn $\alpha, \beta < 0$. Im verbleibenden Fall, $\alpha\beta < 0$, ist $(0,0)$ keine lokale Extremalstelle (Übung).

In den vorigen Beispielen war $H_f(x)$ schon diagonal, so dass die Eigenwerte direkt abgelesen werden konnten. Bei größeren symmetrischen Matrizen wäre es sehr aufwendig oder auch nicht praktikabel, über eine Berechnung der Eigenwerte die Matrizen auf positive (bzw. negative) Definitheit zu testen (und ebenso wenig direkt anhand der Definition). Glücklicherweise gibt es eine Charakterisierung positiv definiter Matrizen, mit deren Hilfe sich positive Definitheit leicht nachprüfen lässt.

Satz 17.14 (Hurwitz-Kriterium) *Gegeben eine symmetrische Matrix* $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *betrachten wir für* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *die Untermatrix*

$$A_k := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k} \in \mathbb{R}^{k\times k},$$

welche ebenfalls symmetrisch ist. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) *A ist positiv definit;*

(b) $\det(A_k) > 0$ *für alle* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

In der Vorlesung wurde das Hurwitz-Kriterium nur ohne Beweis für die Allgemeinbildung erwähnt.

Beispiel 17.15 Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, denn die 1×1-Matrix $A_1 = (4)$ hat Determinante $\det A_1 = 4 > 0$, die 2×2-Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hat Determinante $\det A_2 = 20 > 0$ und schließlich ist

$$\det(A_3) = \det(A) = 40 - 4 - 5 = 31 > 0.$$

Anhang zu Kapitel 17: Beweis des Hurwitz-Kriteriums*

Wir beweisen nun Satz 17.14. Der Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen (da das Hurwitz-Kriterium eher zur Linearen Algebra gehört und zudem recht gut als *black box* anwendbar ist); er ist nicht prüfungsrelevant.

(a)$\Rightarrow$(b): Ist A positiv definit, so auch jede der symmetrischen Matrizen A_k. Ist ρ der kleinste Eigenwert von A, so gilt nämlich für alle $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $y' := (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle y, A_k y \rangle = \sum_{i,j=1}^{k} y_i y_j a_{ij} = \langle y', Ay' \rangle \geq \rho(\|y'\|_2)^2 = \rho(\|y\|_2)^2 \geq 0,$$

weswegen A_k positiv semidefinit ist und der Endomorphismus $y \mapsto A_k y$ von $\mathbb{R}^k$ injektiv, somit bijektiv und folglich A_k invertierbar; also ist A_k positiv definit. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in]0, \infty[$ die Eigenwerte von A_k (mit Wiederholungen gemäß den algebraischen Vielfachheiten), so gibt es eine orthogonale $k \times k$-Matrix T derart, dass

$$A_k = T\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)T^{-1}$$

und somit $\det(A_k) = \det(T)\det(T)^{-1}\det(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = \lambda_1 \cdots \lambda_k > 0$.

(b)$\Rightarrow$(a): Der Beweis ist per Induktion nach n. Ist $n = 1$, so ist $A = (a_{11})$. Ist $a_{11} = \det A > 0$, so ist A diagonal mit Eigenwert $a_{11} > 0$, also A positiv definit.

Induktionsschritt: Ist $n \geq 2$ und gilt die Aussage für $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen, so ist A_{n-1} positiv definit. Folglich gibt es eine orthogonale $(n-1) \times (n-1)$-Matrix P und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} > 0$ derart, dass

$$P^t A_{n-1} P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

Setzen wir $Q := \operatorname{diag}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n-1}}})$, so ist $Q = Q^t$ und

$$Q^t P^t A_{n-1} PQ = \mathbf{1}_{n-1}$$

die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Wir betrachten nun die Blockmatrix $S := \operatorname{diag}(PQ, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Spaltenvektor $a := (a_{1,n}, \ldots, a_{n-1,n})^t \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} S^t AS &= \begin{pmatrix} Q^tP^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a^t & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^tP^tA_{n-1}PQ & Q^tP^ta \\ a^tPQ & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & b \\ b^t & a_{nn} \end{pmatrix} =: B \end{aligned}$$

mit dem Spaltenvektor $b := Q^tP^ta \in \mathbb{R}^{n-1}$. Wir betrachten nun die invertierbare obere Dreiecksmatrix

$$T := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Zeilenvektor $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
T^t B T &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -b^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & b \\ b^t & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -b^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ b^t & a_{nn} - b^t b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & a_{nn} - b^t b \end{pmatrix} =: C
\end{aligned}
$$

mit $I := \mathbf{1}_{n-1}$. Folglich ist

$$
\begin{aligned}
a_{nn} - b^t b &= \det(C) = \det(T^t B T) = \det(T^t S^t A S T) \\
&= \det(T)^2 \det(S)^2 \det(A) > 0
\end{aligned}
$$

und somit die Diagonalmatrix C positiv definit. Nun ist $T^t S^t A S T = C$, also

$$
A = (S^t)^{-1}(T^t)^{-1} C T^{-1} S^{-1} = R^t C R
$$

mit $R := T^{-1} S^{-1}$. Dann ist auch A positiv definit, denn wegen $\det(A) > 0$ ist A invertierbar und A ist positiv semidefinit, weil für alle Spaltenvektoren $y \in \mathbb{R}^n$

$$
\langle y, Ay \rangle = y^t A y = y^t R^t C R y = (Ry)^t C (Ry) = \langle Ry, C(Ry) \rangle \geq 0
$$

gilt. Dies beendet den Beweis. $\square$.

18 Höhere Ableitungen reellwertiger Funktionen

Bisher haben wir stetige Funktionen betrachtet, reellwertige einmal stetig partiell differenzierbare Funktionen und reellwertige zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen.

Definition 18.1 (Höhere Differenzierbarkeit). Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} f$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k$ und alle $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, m\}$, so sagen wir, f sei k *mal partiell differenzierbar*. Sind zudem $f \colon U \to \mathbb{R}$ und die vorigen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} \colon U \to \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, wird f eine k *mal stetig partiell differenzierbare* Funktion (oder kurz: eine C^k-Funktion) genannt.

Ist f stetig, so nennt man f auch eine C^0-Funktion.

Bemerkung 18.2 Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ist eine Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}$ genau dann C^k, wenn f eine C^1-Funktion ist und jede der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ eine C^{k-1}-Funktion.

18.3 Statt $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial}{\partial x_i}$ (mit n Faktoren) schreiben wir auch $\frac{\partial^n}{\partial x_i^n}$.

Beispiel 18.4 Jede konstante Funktion $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ ist C^∞, also C^k für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Denn f ist stetig, also C^0. Sei $k \in \mathbb{N}$. Induktionsvoraussetzung: Jede konstante Funktion ist C^{k-1}. Nun gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$, d.h. alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f sind wieder konstant (also stetig, so dass f eine C^1-Funktion ist) und sogar C^{k-1}, per Induktionsvoraussetzung. Somit ist f eine C^k-Funktion, nach 18.2.

Beispiel 18.5 Jede lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$$

mit $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ ist C^∞. Denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = a_j$$

eine konstante (und somit stetige) Funktion für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$, somit f eine C^1-Funktion. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ als konstante Funktion eine C^{k-1}-Funktion (siehe Beispiel 18.4), also f eine C^k-Funktion nach 18.2.

Definition 18.6 (Partielle Ableitungen in Standard-Reihenfolge). Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^m$, so schreiben wir für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| \leq k$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}} f.$$

Im Falle des Multiindex $\alpha = (0, \ldots, 0)$ ist $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} := f$.

Lemma 18.7 *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^k-Funktion mit $k \in \mathbb{N}$ und $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$. Für $j \in \{1, \ldots, m\}$ sei α_j die Anzahl der $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ mit*

$$i_\ell = j.$$

Mit $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha},$$

wobei $|\alpha| = k$.

Beispiel 18.8 Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^3-Funktion, so ist

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(x_1, x_2)$$

mit $\alpha = (2, 1)$.

Beweis für Lemma 18.7. Der Fall $k = 0$ ist trivial, denn f null mal abgeleitet ist per Definition $f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f$, mit $\alpha = (0, \ldots, 0)$. Der verbleibende Beweis ist per Induktion nach $k \in \mathbb{N}$. Im Fall $k = 1$ gibt es nur die ersten partiellen Ableitungen, die immer Standard-Reihenfolge haben.

Sei nun $k \geq 2$ und gelte nun die Behauptung für jedes f mit $k - 1$ an Stelle von k. Seien f, $i_1, \ldots, i_k$ und α wie im Lemma. Seien $e_1, \ldots, e_m$ die Standard-Einheitsvektoren für $\mathbb{R}^m$. Per Induktionsvoraussetzung ist dann

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f = \frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1}}}$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1}}}.$$

Ist $i_1 \leq i_n$ für alle $n \in \{2, \ldots, k\}$, so ist die rechte Seite in Standard-Reihenfolge und gleich $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$. Andernfalls ist $\alpha_j > 0$ für ein $j < i_1$; wir wählen j minimal. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1}}} &= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^{|\alpha|-2} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1} - e_j}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^{|\alpha|-2} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1} - e_j}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x^{\alpha - e_j}} \\
&= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha};
\end{aligned}$$

hierbei wurde beim Übergang zur zweiten Zeile der Satz von Schwarz angewandt auf die C^2-Funktion $\frac{\partial^{|\alpha|-2} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1} - e_j}}$; beim Übergang zur nächsten Zeile wurde die Induktionsvoraussetzung angewandt, um $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial^{|\alpha|-2} f}{\partial x^{\alpha - e_{i_1} - e_j}}$ in Standard-Reihenfolge umzuschreiben. Wegen der Minimalität von j ist die $k$te partielle Ableitung in der vorletzten Zeile in Standard-Reihenfolge und stimmt mit derjenigen in der letzten Zeile überein. □

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass für differenzierbare Funktionen $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ einer reellen Variablen $f + g$ und rf für $r \in \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar sind, mit

$$(f + g)' = f' + g'$$

und $(rf)' = rf'$. Da wir beim partiellen Ableiten alle bis auf eine Variable festhalten, folgt:

Lemma 18.9 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist für alle C^k-Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ auch $f + g\colon U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ eine C^k-Funktion und auch $rf\colon U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto rf(x)$ für jedes $r \in \mathbb{R}$. Es gilt*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f+g)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}$$

und

$$\frac{\partial^\alpha(rf)}{\partial x^\alpha} = r\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$$

für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| \leq k$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für $f + g$ per Induktion nach k (der Fall rf wird analog behandelt). Induktionsanfang $k = 0$: Summen stetiger Funktionen sind stetig.

Induktionsschritt: Sei $k \geq 1$ und gelte die Aussage für $k - 1$ an Stelle von k. Nach der Vorüberlegung existieren die ersten partiellen Ableitungen von $f + g$ und sind gleich

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Da die rechte Seite stetig ist, ist f eine C^1-Funktion. Da die rechte Seite per Induktionsvoraussetzung sogar C^{k-1} ist, ist f eine C^k-Funktion (siehe 18.2). Jedes $\frac{\partial}{\partial x_i}$ macht aus einer Summe von Funktionen die Summe der partielle Ableitungen, also auch die Komposition $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$. □

Satz 18.10 (Leibniz-Regel). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist für alle C^k-Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ auch $fg\colon U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ eine C^k-Funktion. Es gilt*

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(fg)}{\partial x^\alpha} = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} \frac{\partial^{|\alpha-\beta|} g}{\partial x^{\alpha-\beta}}.$$

Beispiel 18.11 Jede Polynomfunktion $p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist C^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ und somit eine C^∞-Funktion.

Dies ist klar, wenn p die Nullfunktion ist. Andernfalls hat p einen Grad $n > 0$ und es ist

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \, x^\alpha$$

mit gewissen Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$; summiert wird über alle Multiindizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| \leq n$. Nach 18.9 wird p eine C^∞-Funktion sein, wenn wir dies für jedes Monom

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha$$

zeigen können. Dies erfolgt per Induktion nach $|\alpha|$. Die Behauptung ist klar, wenn $|\alpha| = 0$ oder $|\alpha| = 1$; dann ist das Monom konstant bzw. linear und somit C^∞ nach Beispiel 18.4 bzw. Beispiel 18.5. Ist $|\alpha| \geq 2$, so wähle $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\alpha_j \geq 1$. Da $x^{\alpha - e_j}$ per Induktionsvoraussetzung schon C^∞ ist, ist

$$x^\alpha = x_j \, x^{\alpha - e_j}$$

C^∞ nach 18.10.

Beweis von Satz 18.10. Wir zeigen zunächst, dass fg eine C^k-Funktion ist, per Induktion nach k. Ist $k = 0$, so ist fg stetig, also eine C^0-Funktion. Sei nun $k \geq 1$ und gelte die Aussage bereits für $k - 1$ an Stelle von k. da partielle Ableitungen nach x_j gebildet werden, indem alle anderen Variablen festgehelten werden, existiert nach der Produktregel der Analysis 1 die partielle Ableitung $\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}$ und ist gegeben durch

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) g + f \left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right). \tag{101}$$

Da diese Funktion stetig ist, ist fg eine C^1-Funktion. Weiter sind $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, g, f und $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ alles C^{k-1}-Funktionen; per Induktionsvoraussetzung sind daher beide Summanden in (101) C^{k-1}-Funktionen und somit auch die Summe, $\frac{\partial(fg)}{\partial x_j}$, nach 18.9. Also ist fg eine C^k-Funktion, nach 18.2. Gegeben $x \in U$ ist

$$x \in \left]a_1, b_1\right[\times \cdots \times \left]a_m, b_m\right[\subseteq U$$

mit geeigneten $a_j < b_j$. Halten wir $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ fest, liefert die Leibnizregel der Analysis 1 für $x_m \in \left]a_m, b_m\right[$

$$\frac{\partial^{\alpha_m}(fg)}{\partial x_m^{\alpha_m}} = \sum_{\beta_m = 0}^{\alpha_m} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} \frac{\partial^{\beta_m} f}{\partial x_m^{\beta_m}} \frac{\partial^{\alpha_m - \beta_m} g}{\partial x_m^{\alpha_m - \beta_m}}.$$

Fahren wir nun ebenso mit $x_{m-1}, \ldots, x_1$ fort, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{|\alpha|}(fg)}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}(fg) \\
&= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_m=0}^{\alpha_m} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_m^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_m}}{\partial x_m^{\beta_n}} f \frac{\partial^{\alpha_1-\beta_1}}{\partial x_1^{\alpha_1-\beta_1}} \frac{\partial^{\alpha_m-\beta_m}}{\partial x_m^{\alpha_m-\beta_m}} g \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x^\beta} \frac{\partial^{|\alpha-\beta|} g}{\partial x^{\alpha-\beta}}.
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. □

19 Partiell differenzierbare vektorwertige Funktionen

Definition 19.1 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge. Eine Funktion

$$f = (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

wird *stetig partiell differenzierbar* genannt (oder kurz: eine C^1-Funktion), wenn alle Komponenten $f_1, \dots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar sind. Wir definieren dann die Jacobi-Matrix $J_f(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ von f an der Stelle $x \in U$ als

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}.$$

Ist $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und jeder der Komponenten $f_1, \dots, f_n$ eine C^k-Funktion, so wird f eine C^k-Funktion genannt.

Beispiel 19.2 Die Funktion

$$f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 x_3,\ x_1\, e^{x_2 x_3})$$

von drei reellen Variablen ist stetig partiell differenzierbar, da ihre zwei Komponenten es sind. Die Jacobi-Matrix an einer Stelle x lautet

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & 0 & x_1 \\ e^{x_2 x_3} & x_1 x_3\, e^{x_2 x_3} & x_1 x_2\, e^{x_2 x_3} \end{pmatrix}.$$

Schauen wir uns einige Spezialfälle systematisch an.

Beispiel 19.3 (Der Fall $m = 1$). Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Kurve, so ist die Jacobi-Matrix $J_\gamma(x) \in \mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$ der Spaltenvektor

$$J_\gamma(x) = \gamma'(x)$$

mit $\gamma'(x) = (\gamma_1'(x), \dots, \gamma_m'(x))^t$.

Beispiel 19.4 (Der Fall $n = 1$). Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine reellwertige C^1-Funktion, so ist die Jacobi-Matrix

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = (\nabla f(x))^t$$

die zum Gradienten transponierte Zeilenmatrix.

Beispiel 19.5 (Der Fall $n = m$). Eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$F = (F_1, \ldots, F_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$$

auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kann ein *stetig partiell differenzierbares Vektorfeld* genannt werden. Im Falle $n = 2$ oder $n = 3$ kann ein solches visualisiert werden, indem wir an der Stelle $x \in U$ in der Zeichenebene oder im Raum den Vektor $F(x)$ einzeichen. Wir verweisen auf die Analysis 3 für eine Diskussion von Vektorfeldern und zugehörigen Begriffen.

Beispiel 19.6 Der Fall $n = m$ tritt auch in anderen Kontexten auf, etwa wenn lineare oder nicht lineare Koordinatentransformationen durchgeführt werden. Ein typisches Beispiel für eine lineare Koordinatentransformation ist eine aktive Drehung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (\cos(\phi)x_1 - \sin(\phi)x_2, \sin(\phi)x_1 + \cos(\phi)x_2)$$

der Ebene um einen Winkel ϕ. Nicht notwendig lineare Umparametrisierungen liefert z.B. der Satz über die Umkehrfunktion in Kapitel 24. Wichtige Beispiele sind die ebenen Polarkoordinaten sowie Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten im Dreidimensionalen, die uns in der Analysis 3 begegnen werden und dort oft die Berechnung mehrdimensionaler Integrale vereinfachen.

Beispiel 19.7 Jede konstante Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto c$ mit $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ist stetig partiell differenzierbar, mit Jacobi-Matrix $J_f(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$.

Denn wir wissen, dass $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} c_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Beispiel 19.8 Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine $n \times m$-Matrix und

$$\phi_A \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto Ax$$

die zugehörige lineare Abbildung. Dann ist ϕ_A stetig partiell differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ ist die Jacobi-Matrix

$$J_{\phi_A}(x) = A$$

gleich der gegebenen Matrix.

Schreiben wir $f = (f_1, \ldots, f_n) := \phi_A$, so ist nämlich

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k$$

für $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, also f_i ein Polynom vom Grad ≤ 1 und somit f_i stetig partiell differenzierbar, für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Weiter ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(x_k)}_{=\delta_{jk}} = a_{ij}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Somit ist $J_f(x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)) = (a_{ij}) = A$.

Satz 19.9 (Kettenregel). *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $g = (g_1, \ldots, g_n) \colon U \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto g(x)$ eine C^1-Funktion mit $g(U) \subseteq V$ und $f = (f_1, \ldots, f_\ell) \colon V \to \mathbb{R}^\ell$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto f(y)$ eine C^1-Funktion. Dann ist $f \circ g \colon U \to \mathbb{R}^\ell$, $x \mapsto f(g(x))$ stetig partiell differenzierbar mit Jacobi-Matrix*

$$J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x)) J_g(x)$$

an der Stelle $x \in U$. Sind f und g beides C^k-Abbildungen, so ist auch $f \circ g$ eine C^k-Abbildung.

Beweis. Zum Nachweis betrachten wir für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ die $i$te Komponenten $f_i \circ g$ von $f \circ g$. Um für $j \in \{1, \ldots, m\}$ die partielle Ableitung von $f_i \circ g$ nach der Variablen x_j an der Stelle $x \in U$ zu berechnen, betrachten wir für ein $\varepsilon > 0$ die Hilfsfunktion

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\ \to U, \quad t \mapsto g(x + te_j)$$

mit den Komponenten $\gamma_\nu(t) = g_\nu(x + te_j)$ für $\nu \in \{1, \dots, n\}$, so dass also $\gamma'_\nu(0) = \frac{\partial g_\nu}{\partial x_j}(x)$. Nach Satz 16.25 ist $f_i \circ \gamma$ stetig differenzierbar mit Ableitung

$$(f_i \circ \gamma)'(0) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu}(\gamma(0))\gamma'_\nu(0) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu}(g(x))\frac{\partial g_\nu}{\partial x_j}(x).$$

Also existiert $\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_j}(x)$ und ist gleich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu}(g(x))\frac{\partial g_\nu}{\partial x_j}(x).$$

Diese Zahl stimmt mit dem (i, j)-Eintrag der Matrix von $J_f(g(x))J_g(x)$ überein. Die letztere Matrix ist somit gleich der Jacobi-Matrix $J_{f\circ g}(x)$.

Sind f und g beides C^k-Funktionen, so ist nach dem Vorigen $f_i \circ g$ stetig partiell differenzierbar für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Wie oben gezeigt, ist

$$\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_j} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \circ g\right) \frac{\partial g_\nu}{\partial x_j}. \tag{102}$$

Die hier auftretenden Kompositionen $\frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \circ g$ sind per Induktionsvoraussetzung C^{k-1}-Funktionen. Nach der Leibnizregel (Satz 18.10) sind also auch die Summanden in (102) C^{k-1}-Funktionen. Also ist auch die Summe $\frac{\partial(f_i \circ g)}{\partial x_j}$ eine C^{k-1}-Funktion für alle i und j, nach Lemma 18.9. Folglich ist $f_i \circ g$ eine C^k-Funktion für jedes i und somit die vektorwertige Funktion $f \circ g$ eine C^k-Funktion. □

Satz 19.10 (Mittelwertsatz in Integralform). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f = (f_1, \dots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion. Sind $x, y \in U$ mit $x + t(y - x) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, so ist*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 J_f(x + t(y - x))(y - x)\, dt.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass auf beiden Seiten die $i$ten Komponenten gleich sind für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, also $f_i(y) - f_i(x) = \int_0^1 J_{f_i}(x + t(y - x))(y - x)\, dt$. Wir dürfen daher annehmen, dass $n = 1$ ist. Dieser Fall wurde in Satz 16.24 behandelt. □

Folgerung 19.11 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion. Sei $\|\cdot\|_E$ eine Norm auf $E := \mathbb{R}^m$, $\|\cdot\|_F$ eine Norm auf $F := \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die zugehörige Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times m}$. Sind $x, y \in U$ mit $x + t(y - x) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$, so gilt*

$$\|f(y) - f(x)\|_F \le \int_0^1 \|J_f(x + t(y - x))(y - x)\|_F \, dt$$

und somit

$$\|f(y) - f(x)\|_F \le \sup\{\|J_f(x + t(y - x))\|_{\mathrm{op}} \colon t \in [0, 1]\} \, \|y - x\|_E. \tag{103}$$

Ist $M \ge 0$ derart, dass $\|J_f(x + t(y - x))\|_{\mathrm{op}} \le M$ für alle $t \in [0, 1]$, so gilt also

$$\|f(y) - f(x)\|_F \le M \, \|y - x\|_E.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Mittelwertsatz in Integralform durch Anwendung der ersten Integralabschätzung aus Satz 15.6 (c). Die zweite Aussage ist eine unmittelbare Folgerung aus der ersten und die dritte eine unmittelbare Folgerung aus der zweiten. □

Bemerkung 19.12 Die letzte Aussage der Folgerung wird mitunter *Satz vom endlichen Zuwachs* oder auch *Schrankensatz* genannt.

Die generelle lineare Gruppe

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Gruppe aller invertierbaren reellen $(n \times n)$-Matrizen, mit der Matrixmultiplikation als Gruppen-Multiplikation. Ist E ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, so schreiben wir $\mathrm{GL}(E)$ für die Gruppe aller Vektorraum-Automorphismen $\alpha\colon E \to E$, mit der Komposition von Automorphismen als der Gruppen-Multiplikation.

Satz 19.13 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *ist eine offene Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^{n\times n}$ aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Die Abbildung*

$$j\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^{-1}$$

ist C^∞ und ebenso die Gruppenmultiplikation

$$m\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto AB.$$

Beweis. Da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ offen und die Determinante

$$\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

stetig ist, ist

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Nach der Cramerschen Regel ist für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ der (k, ℓ)-Matrixeintrag der inversen Matrix von der Form

$$j(A)_{k\ell} = (A^{-1})_{k\ell} = \frac{p_{k\ell}(A)}{\det(A)}$$

mit einer Polynomfunktion $p_{k\ell}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, die sich als eine Determinate in Einträgen von A schreiben lässt. Also ist jede Komponente von $j(A)$ eine C^∞-Funktion von A und somit j eine matrixwertige C^∞-Funktion.

Die Matrix-Multiplikation

$$\beta\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (A, B) \mapsto AB$$

ist bilinear und somit eine C^∞-Funktion (vergleiche Beispiel 18.11 oder Satz 18.10). Als Einschränkung einer glatten Funktion auf eine offene Teilmenge ist auch

$$m = \beta|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

glatt. □

Lemma 19.14 *Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$.*

(a) *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$, so ist $\mathbf{1}_n - A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

(b) *Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|Y\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$, so ist $A + Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Beweis. (a) Wir zeigen, dass der Endomorphismus

$$\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (\mathbf{1}_n - A)(x) = x - Ax$$

injektiv ist (und nach der Dimensionsformel also auch surjektiv und somit ein Automorphismus). Ist $x \in \ker(\alpha)$, so ist

$$0 = x - A(x),$$

also $A(x) = x$ und somit

$$\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}\|x\|.$$

Es folgt

$$(1 - \|A\|_{\mathrm{op}})\|x\| \leq 0$$

mit $1 - \|A\|_{\mathrm{op}} > 0$ und somit $\|x\| = 0$, so dass $x = 0$.

(b) Es ist $A + Y = A(\mathbf{1}_n + A^{-1}Y) = A(\mathbf{1}_n - X)$ mit $X := -A^{-1}Y$. Da

$$\|X\|_{\mathrm{op}} = \|A^{-1}Y\|_{\mathrm{op}} \leq \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|Y\|_{\mathrm{op}} < \|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}\frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = 1$$

per Voraussetzung, ist $\mathbf{1}_n - X$ nach (a) invertierbar und somit auch $A + Y = A(\mathbf{1}_n - X)$ als Produkt invertierbarer Matrizen. □

Bemerkung 19.15 Nach Satz 19.13 ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$; für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gibt es also ein $\varepsilon > 0$ derart, dass die ganze ε-Kugel

$$\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \|X - A\|_{\mathrm{op}} < \varepsilon\} = \{A + Y \colon Y \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \|Y\|_{\mathrm{op}} < \varepsilon\}$$

um A in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ enthalten ist. Lemma 19.14 gibt uns ε quantitativ in die Hand: wir können stets

$$\varepsilon := \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

wählen.

Für $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ und eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ möchten wir für die Allgemeinbildung noch eine Interpretation geben für den Kehrwert $\frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ bzw. für

$$\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}},$$

wenn $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum-Automorphismus ist.

Zunächst ist klar, dass für jede lineare Abbildung $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\|\alpha\|_{\mathrm{op}} = \sup\left\{\frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} \colon 0 \neq x \in \mathbb{R}^n\right\} = \max\left\{\frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} \colon 0 \neq x \in \mathbb{R}^n\right\};$$

das Maximum wird angenommen, da wir nur $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ betrachten müssen und die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ kompakt ist, die stetige

Norm $\|\cdot\|$ darauf also ein Maximum annimmt. In diesem Sinne kann man also $\|\alpha\|_{\mathrm{op}}$ als den *größten Verzerrungsfaktor* von α interpretieren.

Analog lässt sich für $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ die Zahl $\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ als ein "Mindeststreckfaktor" interpretieren, im folgenden Sinn:

Lemma 19.16 *Es ist*

$$\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|}.$$

Insbesondere gilt

$$\|\alpha(x)\| \geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} \|x\| \tag{104}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Mit $E := \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \inf_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} &= \inf_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\alpha(\alpha^{-1}(v))\|}{\|\alpha^{-1}(v)\|} = \inf_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\|v\|}{\|\alpha^{-1}(v)\|} \\ &= \frac{1}{\sup_{v \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\alpha^{-1}(v)\|}{\|v\|}} = \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}, \end{aligned}$$

da $]0,\infty[\to]0,\infty[$, $y \mapsto 1/y$ bijektiv und monoton fallend ist, somit Suprema auf Infima abbildet. Das Infimum wird angenommen, da wir nur Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ benötigen zur Bildung des Infimums und die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ kompakt ist, die stetige Norm $\|\cdot\|$ darauf also ein Minimum annimmt.

Die Ungleichung (104) ist trivial, wenn $x = 0$. Ist $x \neq 0$, so ist

$$\|\alpha(x)\| = \frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} \|x\| \geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} \|x\|$$

nach dem schon Gezeigten; also gilt auch hier (104). $\square$

20 Beziehungen zwischen Lipschitzkonstanten und Ableitungen

In diesem Kapitel erläutern wir Beziehungen zwischen Lipschitzkonstanten und der Größe der Ableitung einer C^1-Funktion.

Definition 20.1 Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so definieren wir für eine Funktion $f\colon X \to Y$

$$\mathrm{Lip}(f) := \sup \left\{ \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \colon x, y \in X \text{ mit } x \neq y \right\} \in [0, \infty].$$

Lemma 20.2 *In der Situation von Definition* 20.1 *ist die Funktion f genau dann Lipschitz-stetig, wenn* $\mathrm{Lip}(f) < \infty$*. In diesem Fall ist* $\mathrm{Lip}(f)$ *die kleinste Lipschitzkonstante für f, d.h.* $\mathrm{Lip}(f)$ *ist eine Lipschitzkonstante und für jede Lipschitzkonstante L für f ist* $\mathrm{Lip}(f) \leq L$*.*

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig und $L \in [0, \infty[$ eine Lipschitzkonstante, so ist $d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x,y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und somit

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \leq L.$$

Übergang zum Supremum liefert $\mathrm{Lip}(f) \leq L$; insbesondere ist $\mathrm{Lip}(f) < \infty$. Ist umgekehrt $\mathrm{Lip}(f) < \infty$, so folgt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \mathrm{Lip}(f)\, d_X(x,y) \tag{105}$$

für alle $x, y \in X$: Die Ungleichung ist nämlich trivial, wenn $x = y$ ist (dann sind beide Seiten gleich 0). Ist $x \neq y$, so ist

$$\frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \leq \mathrm{Lip}(f)$$

und Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit $d_X(x,y)$ führt auf (105). Nach (105) ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}(f)$. □

Beispiel 20.3 Ist $\alpha\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$, so ist α Lipschitz-stetig mit

$$\mathrm{Lip}(\alpha) = \|\alpha\|_{\mathrm{op}}.$$

In der Tat haben wir früher schon nachgerechet, dass α Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ ist; somit ist $\mathrm{Lip}(\alpha) \le \|\cdot\|_{\mathrm{op}}$. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \le 1$ ist jedoch

$$\|\alpha(x)\|_F = \|\alpha(x) - \alpha(0)\|_F \le \mathrm{Lip}(\alpha)\|x - 0\|_E = \mathrm{Lip}(\alpha)\|x\|_E \le \mathrm{Lip}(\alpha);$$

Bildung des Supremums über x liefert $\|\alpha\|_{\mathrm{op}} \le \mathrm{Lip}(\alpha)$ und somit Gleichheit.

Wir halten eine Rechenregel für minimale Lipschitzkonstanten fest.

Lemma 20.4 *Sind (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume und sind $f\colon Y \to Z$ sowie $g\colon X \to Y$ Lipschitz-stetige Abbildungen, so ist auch die Komposition $f \circ g\colon X \to Z$ Lipschitz-stetig, mit $\mathrm{Lip}(f \circ g) \le \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)$.*

Beweis. Für alle $x, y \in X$ gilt $d_Z(f(g(x)), f(g(y)) \le \mathrm{Lip}(f) d_Y(g(x), g(y)) \le \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g) d_X(x, y)$. Also ist $f \circ g$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)$, wegen der Minimalität folglich $\mathrm{Lip}(f \circ g) \le \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)$. □

20.5 Es seien $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ Normen auf $E := \mathbb{R}^n$ bzw. $F := \mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die entsprechende Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Ist $U \subseteq E$ offen und $f\colon U \to F$ eine C^1-Funktion, so definieren wir

$$\|J_f\|_\infty := \sup\{\|J_f(x)\|_{\mathrm{op}} \colon x \in U\} \in [0, \infty]$$

unter Benutzung der Jacobimatrix $J_f(x)$ von f an der Stelle $x \in U$.

Satz 20.6 *Es seien $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$ Normen auf $E := \mathbb{R}^n$ bzw. $F := \mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die entsprechende Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Ist $U \subseteq E$ offen und $f\colon U \to F$ eine C^1-Funktion, so gilt*

$$\|J_f\|_\infty \le \mathrm{Lip}(f).$$

Ist U zudem konvex, so gilt

$$\mathrm{Lip}(f) = \|J_f\|_\infty;$$

Lipschitz-Stetigkeit von f ist dann also äquivalent zur Beschränktheit der Abbildung $J_f\colon U \to (\mathbb{R}^{m\times n}, \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$.

Beweis. Sei $x \in U$. Gegeben $y \in E$ mit $\|y\|_E \leq 1$ ist $x + ty \in U$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nahe 0 und

$$\|f(x+ty)-f(x)\|_F \leq \operatorname{Lip}(f)\|(x+ty)-x\|_E = \operatorname{Lip}(f)\|ty\|_E = \operatorname{Lip}(f)|t|\,\|y\|_E.$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\right\|_F &= \frac{1}{|t|}\|f(x+ty)-f(x)\|_F \leq \frac{1}{|t|}\operatorname{Lip}(f)|t|\,\|y\|_E \\ &= \operatorname{Lip}(f)\|y\|_E \leq \operatorname{Lip}(f)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\|J_f(x)y\|_F &= \|(D_y f)(x)\|_F = \left\|\lim_{t\to 0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\right\|_F \\ &= \lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\right\|_F \leq \operatorname{Lip}(f).\end{aligned}$$

Bildung des Supremums über alle y liefert $\|J_f(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \operatorname{Lip}(f)$.

Ist U konvex, so folgt für alle $x, y \in U$ aus (103) die Abschätzung

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \|J_f\|_\infty \|y - x\|_E;$$

es ist also f Lipschitz-stetig mit $\operatorname{Lip}(f) \leq \|J_f\|_\infty$. □

Wir lernen später noch eine Variante von Satz 20.6 kennen, das Lemma 21.12.

Lipschitzkonstanten bleiben unverändert, wenn wir Funktionen nur durch additive Konstanten abändern.

Lemma 20.7 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f\colon X \to E$ eine Funktion. Gegeben $C \in E$ schreibe $f + C$ für die Funktion $X \to E$, $x \mapsto f(x) + C$. Dann gilt* $\operatorname{Lip}(f) = \operatorname{Lip}(f + C)$.

Beweis. Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt $(f + C)(y) - (f + C)(x) = f(y) + C - f(x) - C = f(y) - f(x)$, woraus die Behauptung folgt. □

21 Totale Differenzierbarkeit

Wir lernen nun einen von Koordinaten unabhängigen Ableitungsbegriff (der totalen Ableitung) kennen. Die Kettenregel ist für diesen einfach zu beweisen. Jenseits von Funktionen mehrerer reeller Variablen können sogar Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von normierten Räumen behandelt werden. Im endlich-dimensionalen Fall stellen wir die Verbindung zu partiellen Ableitungen her.

Eine zentrale Grundidee der Differentialrechung für Funktionen einer Variablen war, eine Funktion f um eine Stelle x durch eine affin-lineare Funktion (die Tangente an den Graphen von f) zu approximieren. Wir haben gesehen, dass die Differenzierbarkeit von f in x äquivalent ist zur Existenz einer affin-linearen Approximation von f um x (siehe Satz 4.1). Im Falle von Funktionen mehrerer Variablen benutzen wir letztere als *Definition* von Differenzierbarkeit:

Definition 21.1 Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume,[29] $U \subseteq E$ eine offene Menge, $f\colon U \to F$ eine Abbildung und $x \in U$. Ist $A\colon E \to F$ eine stetige lineare Abbildung (also $A \in \mathcal{L}(E,F)$), so gilt

$$(\forall y \in U) \qquad f(y) = f(x) + A(y-x) + R(y) \tag{106}$$

mit $R(y) := f(y) - f(x) - A(y-x)$. Dann ist also $R(x) = 0$. Kann $A \in \mathcal{L}(E,F)$ so gewählt werden, dass[30]

$$\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{\|y-x\|_E} = 0 \quad \text{in } F, \tag{107}$$

so nennen wir f *total differenzierbar* (oder kurz: *differenzierbar*) an der Stelle x.

Bemerkung 21.2 (a) Die Bedingung (107) bedeutet, dass

$$\lim_{y \to x} \frac{\|R(y)\|_F}{\|y-x\|_E} = 0. \tag{108}$$

In der Literatur gibt es hierfür auch die Kurzschreibweise $R(y) = o(\|y-x\|)$ (Landausches klein-o-Symbol).

[29] Zum Beispiel $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$.

[30] Für $y \neq x$.

(b) Ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist $A \in \mathcal{L}(E, F)$ durch (106) und (107) eindeutig festgelegt, denn wir zeigen, dass für alle $u \in E$

$$A(u) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tu) - f(x)) = (D_u f)(x) \tag{109}$$

gleich der Richtungsableitung von f in x in der Richtung u ist. Dies ist klar, wenn $u = 0$ (dann ist $A(u) = 0 = (D_0 f)(x)$). Ist $u \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t}(f(x + tu) - f(x)) - A(u) \right\|_F &= \left\| \frac{R(tu)}{t} \right\|_F = \|u\|_E \frac{\|R(x + tu)\|_F}{\|tu\|_E} \\ &= \|u\|_E \frac{\|R(x + tu)\|_F}{\|(x + tu) - x\|_E} \to 0 \end{aligned}$$

für $t \to 0$ (nach (a)), somit (wie benötigt) $\frac{1}{t}(f(x + tu) - f(x)) \to A(u)$.

Fortan – nachdem die Eindeutigkeit geklärt ist – schreiben wir $f'(x) := A$. Dann ist also $f'(x)$ die eindeutige stetige lineare Abbildung $E \to F$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y) \tag{110}$$

und (107). Wir nennen die lineare Abbildung $f'(x)\colon E \to F$ die *Ableitung* von f an der Stelle x. Weiter nennen wir die Funktion

$$E \to F, \quad y \mapsto f(x) + f'(x)(y - x)$$

die *affin-lineare Approximation* von f um die Stelle x. Aus (109) wird die wichtige und nützliche Formel

$$(\forall u \in E) \qquad f'(x)(u) = (D_u f)(x). \tag{111}$$

(c) Ist f an der Stelle x total differenzierbar, so ist f an der Stelle x stetig. Denn für $y \to x$ mit $y \neq x$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_F &= \|f'(x)(y - x) + R(y)\|_F \leq \|f'(x)(y - x)\|_F + \|R(y)\|_F \\ &\leq \|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \|y - x\|_E + \|y - x\|_E \frac{\|R(y)\|_F}{\|y - x\|_E} \to 0 \end{aligned}$$

(da alle drei Bestandteile gegen 0 gehen, siehe (a)).

(d) Ist $E = \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$, so ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$ und wir erhalten wir nach (111) für den Standard-Einheitsvektor e_j von $\mathbb{R}^m$

$$f'(x)(e_j) = (D_{e_j} f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $f'(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ entspricht bezüglich den Standard-Basen also der $(n \times m)$-Matrix

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix},$$

die wir wie in Kapitel 19 die *Jacobi-Matrix* nennen. Schreibt man Vektoren aus $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren, so wird aus (110)

$$f(y) = f(x) + J_f(x)(y - x) + R(y),$$

wobei die Matrix und der Spaltenvektor in der üblichen Art und Weise multipliziert werden.

Definition 21.3 Es seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume, $U \subseteq E$ eine offene Menge und $f\colon U \to F$ eine Abbildung. Ist $f\colon U \to F$ an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar und die Abbildung

$$f'\colon U \to (\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}), \quad x \mapsto f'(x)$$

stetig, so nennen wir f *stetig differenzierbar* oder auch *einmal stetig Fréchet-differenzierbar*; man nennt f dann auch kurz eine *FC^1-Funktion*. Höhere Differenzierbarkeit wird rekursiv definiert: Ist f eine FC^1-Funktion und

$$f'\colon U \to (\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}), \quad x \mapsto f'(x)$$

eine FC^{k-1}-Funktion für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$, so nennen wir f eine FC^k-Funktion.[31] Ist f eine FC^k-Funktion für alle $k \in \mathbb{N}$, so nennen wir f eine *FC^∞-Funktion.*

[31] In Worten: *k mal stetig Fréchet differenzierbar*, oder kurz: *k mal stetig differenzierbar*.

Bemerkung 21.4 Statt FC^k schreibt man meist C^k. Da das Symbol C^k im Endlich-Dimensionalen jedoch bereits für k mal stetig *partiell* differenzierbare Funktionen belegt ist, müssen wir eine separate Bezeichnung FC^k benutzen (jedenfalls vorübergehend so lange, bis wir gezeigt haben, dass dort beide Eigenschaften äquivalent sind).

Beispiele 21.5 (a) Jede konstante Funktion $f\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen ist eine FC^∞-Funktion.

Es ist nämlich f an jeder Stelle $x \in E$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$, denn es ist
$$f(y) = c = f(x) = f(x) + 0(y - x) + R(y)$$
mit $R(y) = 0$. Da die konstante Funktion $f'\colon E \to \mathcal{L}(E, F), \quad x \mapsto 0$ stetig ist, ist f stetig differenzierbar. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ist per Induktion die konstante Funktion f' eine FC^{k-1}-Funktion, also f eine FC^k-Funktion.

(b) Jede stetige lineare Abbildung $\lambda\colon E \to F$ zwischen normierten Räumen ist eine FC^∞-Funktion.

Es ist nämlich λ an jeder Stelle $x \in E$ differenzierbar mit $\lambda'(x) = \lambda$, denn wegen der Linearität ist
$$\lambda(y) = \lambda(x) + \lambda(y - x) = \lambda(x) + \lambda(y - x) + R(y)$$
mit $R(y) = 0$. Da die konstante Funktion $\lambda'\colon E \to \mathcal{L}(E, F)$, $x \mapsto \lambda$ stetig ist, ist λ stetig differenzierbar. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ist die konstante Funktion λ' nach (a) sogar FC^{k-1}, somit λ eine FC^k-Funktion.

(c) Seien $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume und
$$\beta\colon E_1 \times E_2 \to F, \quad (x_1, x_2) \mapsto \beta(x_1, x_2)$$
eine stetige bilineare Abbildung. Dann ist β eine FC^∞-Funktion.

Es ist nämlich β an jeder Stelle $x = (x_1, x_2)$ differenzierbar, denn für alle $y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ gilt
$$\begin{aligned}
\beta(y) &= \beta(y_1, y_2) = \beta(x_1 + (y_1 - x_1), x_2 + (y_2 - x_2)) \\
&= \beta(x_1, x_2) + \beta(x_1, y_2 - y_1) + \beta(y_1 - x_1, x_2) + \beta(y_1 - x_1, y_2 - x_2) \\
&= \beta(x) + A(y - x) + R(y)
\end{aligned}$$

mit der linearen Abbildung

$$A\colon E_1 \times E_2 \to F, \quad z = (z_1, z_2) \to \beta(x_1, z_2) + \beta(z_1, x_2)$$

und $R(y) := \beta(y_1 - x_1, y_2 - x_1)$. Die lineare Abbildung A ist stetig, da

$$\begin{aligned} \|A(z)\|_F &\le \|\beta(x_1, z_2)\|_F + \|\beta(z_1, x_2)\|_F \\ &\le \|\beta\|_{\mathrm{op}}\|x_1\|_1\|z_2\|_2 + \|\beta\|_{\mathrm{op}}\|z_1\|_1\|x_2\|_2 \\ &\le \|\beta\|_{\mathrm{op}}(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2)\max\{\|z_1\|_1, \|z_2\|_2\} = C\|z\| \qquad (112) \end{aligned}$$

mit $C := \|\beta\|_{\mathrm{op}}(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2)$ und $\|z\| := \max\{\|z_1\|_1, \|z_2\|_2\}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\|R(y)\|_F}{\|y - x\|} &\le \frac{\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|y_1 - x_1\|_1\|y_2 - x_2\|_2}{\|y - x\|} \\ &\le \frac{\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|y - x\|^2}{\|y - x\|} = \|\beta\|_{\mathrm{op}}\|y - x\| \to 0 \end{aligned}$$

für $y \to x$. Also ist β an der Stelle x differenzierbar mit $\beta'(x) = A$, d.h. es ist

$$\beta'(x)(z) = \beta(x_1, z_1) + \beta(z_1, x_2).$$

Da β bilinear ist, ist $\beta'(x)(z)$ linear in x (wie die vorige Formel zeigt), also $\beta'\colon E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_1, \times E_2, F)$, $x \mapsto \beta'(x)$ eine lineare Abbildung. Diese ist stetig, denn nach (112) ist

$$\|\beta'(x)\|_{\mathrm{op}} \le \|\beta\|_{\mathrm{op}}(\|x_1\|_1 + \|x_2\|_2) \le 2\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|x\|$$

und somit $\|\beta'\|_{\mathrm{op}} \le 2\|\beta\|_{\mathrm{op}}$. Also ist β stetig differenzierbar. Da β' eine stetige lineare Abbildung ist, ist β' nach (b) für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$ eine FC^{k-1}-Abbildung, folglich die FC^1-Abbildung β eine FC^k-Abbildung.

Für totale Differenzierbarkeit gilt eine Kettenregel in der folgenden Form.

Satz 21.6 *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offene Mengen und $x_0 \in U$. Ist $g\colon U \to Y$ eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion mit $g(U) \subseteq V$ und $f\colon V \to Z$, $y \mapsto f(y)$ an der Stelle $g(x_0)$ differenzierbar, so ist*

$$f \circ g\colon U \to Z, \quad y \mapsto f(g(y))$$

an der Stelle x_0 differenzierbar und

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \circ g'(x_0). \qquad (113)$$

Beweis. Sei $y_0 := g(x_0)$. Wir betrachten die affin-linearen Approximationen

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x) \tag{114}$$

und

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + R_f(y) \tag{115}$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R_g(x)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0 \quad \text{und} \lim_{y \to y_0} \frac{\|R_f(y)\|_Z}{\|y - y_0\|_Y} = 0.$$

Nach (115) gilt

$$f(g(x)) = f(y_0) + f'(y_0)(g(x) - y_0) + R_f(g(x)).$$

Setzen wir hier $g(x) - y_0 = g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$ ein, so erhalten wir

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + (f'(g(x_0)) \circ g'(x_0))(x - x_0) + \underbrace{f'(g(x_0))R_g(x) + R_f(g(x))}_{=:R(x)}$$

für $x \in U$. Um den Beweis zu beenden, müssen wir zeigen, dass das Restglied $R(x)$ in dieser affin-linearen Approximation von $f \circ g$ schnell genug gegen 0 geht, also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(x)\|_Z}{\|x - x_0\|_X} = 0;$$

oder äquivalent: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\rho > 0$ derart, dass

$$\|x - x_0\|_X < \rho \;\Rightarrow\; \|R(x)\|_Z \leq \varepsilon \|x - x_0\|_X \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\|_X \leq \rho.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\|R_f(y)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2(\|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}} + 1)} \|y - y_0\|_Y \tag{116}$$

für alle $y \in V$ mit $\|y - y_0\|_Y \leq \delta$. Weiter existiert ein $\rho > 0$ derart, dass

$$\|R_g(x)\|_Y \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(\|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}} + 1)}\right\} \|x - x_0\|_X \tag{117}$$

für alle $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X \leq \rho$. Da g an der Stelle x_0 stetig ist, dürfen wir nach Verkleinern von ρ zudem annehmen, dass

$$\|g(x) - g(x_0)\|_Y \leq \delta \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \|x - x_0\|_X \leq \rho. \tag{118}$$

Sei $x \in U$ mit $\|x - x_0\|_X \leq \rho$. Nach (117) gilt dann

$$\begin{aligned} \|f'(y_0)R_g(x)\|_Z &\leq \|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}}\|R_g(x)\|_Y \\ &\leq \|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}}\frac{\varepsilon}{2(\|f'(y_0)\|_{\mathrm{op}}+1)}\|x - x_0\|_X \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|_X. \end{aligned} \tag{119}$$

Nun gilt nach (114)

$$\begin{aligned} \|g(x) - y_0\|_Y &= \|g(x) - g(x_0)\|_Y = \|g'(x_0)(x - x_0) + R_g(x)\|_Y \\ &\leq \|g'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|R_g(x)\|_Y \\ &\leq \|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}}\|x - x_0\|_X + \|x - x_0\|_X \\ &\leq (\|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}} + 1)\|x - x_0\|_X. \end{aligned} \tag{120}$$

Wegen (118) können wir (116) mit $y := g(x)$ anwenden und erhalten

$$\|R_f(g(x))\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{2(\|g'(x_0)\|_{\mathrm{op}}+1)}\|g(x) - y_0\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|_X, \tag{121}$$

wobei für die letzte Ungleichung (120) eingesetzt wurde. Aus (119) und (121) folgt nun $\|R(x)\|_Z \leq \|f'(y_0)R_g(x)\|_Z + \|R_f(g(x))\|_Z \leq \varepsilon\|x - x_0\|_X$. $\square$

Beispiel 21.7 Wenn $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^\ell$, so entspricht $g'(x)$ der Matrix $J_g(x)$ und $f'(g(x))$ der Matrix $J_f(g(x))$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Komposition linearer Abbildungen dem Matrixprodukt entspricht. Aus (113) ergibt sich also die Formel

$$J_{f \circ g}(x) = J_f(g(x))J_g(x)$$

für die Jacobimatrizen, wobei auf der rechten Seite das Matrixprodukt verwendet wird.

Stetige Abbildungen nennen wir auch FC^0.

Lemma 21.8 *Es seien E, F_1 und F_2 normierte Räume, $U \subseteq E$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda\colon F_1 \to F_2$ eine bijektive stetige lineare Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion. Dann gilt: Eine Abbildung $f\colon U \to F_1$ ist genau dann FC^k, wenn $\lambda \circ f$ eine FC^k-Abbildung ist.*

Beweis. Da wir $\lambda \circ f$ und λ^{-1} die Rollen von f und λ spielen können, genügt es zu zeigen: Ist f eine FC^k-Abbildung, so ist auch $\lambda \circ f$ eine FC^k-Abbildung. Für $k = 0$ ist dies klar, denn ist f stetig, so auch $\lambda \circ f$. Ist nun $k \geq 1$ und gilt die Aussage für $k - 1$ statt k, so sei f eine FC^k-Funktion. Da λ eine FC^1-Funktion mit $\lambda'(y) = \lambda$ (für alle $y \in E_1$) ist, ist nach der Kettenregel $\lambda \circ f$ an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar mit

$$(\lambda \circ f)'(x) = \lambda'(f(x)) \circ f'(x) = \lambda \circ f'(x) = \lambda_*(f'(x)) = (\lambda_* \circ f')(x)$$

mit der Abbildung

$$\lambda_* \colon \mathcal{L}(E, F_1) \to \mathcal{L}(E, F_2) \quad A \mapsto \lambda \circ A.$$

Man beachte, dass λ_* linear ist. Weiter ist

$$\|\lambda_*(A)\|_{\mathrm{op}} = \|\lambda \circ A\|_{\mathrm{op}} \leq \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \|A\|_{\mathrm{op}} \leq \|\lambda\|_{\mathrm{op}}$$

für alle $A \in \mathcal{L}(E, F_1)$ mit $\|A\|_{\mathrm{op}} \leq 1$, somit

$$\|\lambda_*\|_{\mathrm{op}} \leq \|\lambda\|_{\mathrm{op}} < \infty$$

und somit die lineare Abbildung λ_* stetig. Da f' eine FC^{k-1}-Abbildung und λ_* stetig linear ist, ist per Induktionsvoraussetzung

$$(\lambda \circ f)' = \lambda_* \circ f'$$

eine FC^{k-1}-Abbildung (insbesondere stetig). Also ist $\lambda \circ f$ eine FC^1-Funktion und $(\lambda \circ f)'$ eine FC^{k-1}-Funktion, folglich $\lambda \circ f$ eine FC^k-Funktion. □

Satz 21.9 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist k mal stetig Fréchet-differenzierbar* (*also eine FC^k-Funktion*)*;*

(b) *f ist k mal stetig partiell differenzirbar* (*also eine C^k-Funktion*)*.*

Beweis. Der Beweis ist per Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k = 0$ bedeutet C^0 und FC^0 beides das gleiche, nämlich Stetigkeit von f. Sei nun $k \geq 1$ und gelte die Aussage für $k - 1$ an Stelle von k. Ist f eine FC^k-Abbildung, so ist insbesondere f eine FC^1-Abbildung und somit existieren die partiellen

Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ und $x \in U$ (siehe obige Diskussion der Jacobi-Matrix). Wir können mittels der Standardbasen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbb{R}^{n\times m}$ identifizieren und somit (indem wir die Matrixeinträge in einer festen Reihenfolge auflisten) mit $\mathbb{R}^{nm}$. Sei

$$\lambda\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{nm}$$

der so erhaltene Isomorphismus von Vektorräumen. Da alle Normen auf endlich-dimensionalen Vetorräumen äquivalent sind, sind λ und λ^{-1} stetig.[32] Da nun f' eine FC^{k-1}-Abbildung ist, ist $\lambda \circ f'$ eine FC^{k-1}-Abbildung (nach dem vorigen Lemma), also C^{k-1} (per Induktionsannahme) und somit sind alle Komponenten von $\lambda \circ f'$ Funktionen, die C^{k-1} sind. Dies sind genau die Funktionen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Insbesondere sind diese stetig, also ist f partiell stetig differenzierbar und alle partiellen Ableitungen sind C^{k-1}, womit f eine C^k-Funktion ist.

Ist umgekehrt f eine C^k-Funktion mit $k \geq 1$, so sind $f_1, \ldots, f_n$ reellwertige C^k-Funktionen und somit C^1. Gegeben $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U$ sei $f'(x)$ die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto J_f(x)v.$$

Sei $R_i\colon U \to \mathbb{R}$ das Restglied in

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)(y_j - x_j) + R_i(y)$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $R(y) = (R_1(y), \ldots, R_n(y))$ das Restglied in

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y).$$

Für $y \to x$ gilt

$$\frac{R(y)}{\|y - x\|_\infty} \to 0,$$

denn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die $i$te Komponente des Quotienten gegeben durch

$$\frac{R_i(y)}{\|y - x\|_\infty};$$

[32] $x \mapsto \|\lambda^{-1}(x)\|_{\mathrm{op}}$ ist äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^{nm}$. Also gibt es $C_1, C_2 > 0$ mit $C_1\|\lambda^{-1}(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \|x\|_\infty \leq C_2\|\lambda^{-1}(x)\|_{\mathrm{op}}$. Daraus folgt $\|\lambda^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq C_1^{-1} < \infty$ und (indem wir $x = \lambda(y)$ einsetzen) $\|\lambda(y)\|_\infty \leq C_2\|y\|_{\mathrm{op}}$ und somit $\|\lambda\|_{\mathrm{op}} \leq C_2 < \infty$.

dieser Ausdruck konvergiert für $y \to x$ gegen 0, nach Satz 16.17. Also ist f an der Stelle x total differenzierbar mit $f'(x)$ wie oben als totaler Ableitung.

Da $(\lambda \circ f')(x)$ die Komponenten $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ hat und diese C^{k-1} sind, ist $\lambda \circ f'$ eine C^{k-1}-Abbildung, also FC^{k-1} per Induktionsvoraussetzung. Nach Lemma 21.8 ist dann auch f' eine FC^{k-1}-Abbildung, insbesondere also stetig. Somit ist f eine FC^1-Abbildung derart, dass f' eine FC^{k-1}-Abbildung ist und somit ist f eine FC^k-Abbildung. □

Bemerkung 21.10 Im Endlich-Dimensionalen (für Abbildungen zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$) werden wir im folgenden nicht mehr C^k-Funktionen und FC^k-Funktionen unterscheiden (da beide Eigenschaften nach Satz 21.9 äquivalent sind).

Bemerkung 21.11 Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve, so habe wir zwei Bedeutungen für $\gamma'(t)$: Zunächst haben wir wie im Kapitel über Wege den Tangentenvektor

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{s\to t} \frac{1}{s-t}(\gamma(s) - \gamma(t)) \in \mathbb{R}^n$$

(mit $s \neq t$), für den wir im weiteren Verlauf der Bemerkung zur besseren Unterscheidung $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ schreiben. Zum anderen haben wir die totale Ableitung

$$\gamma'(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

die also eine lineare Abbildung $\gamma'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist. Was haben die beiden miteinander zu tun? Nun, nach Bemerkung 21.2 (d) gilt für die Funktion γ der einen Variablen $x_1 = t$:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(t) = \gamma'(t)(e_1) = \gamma'(t)(1)$$

mit dem Standard-Basisvektor $e_1 = 1$ für $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Es ist also

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = \gamma'(t)(1) \text{ und } \gamma'(t)(s) = s\frac{d\gamma}{dt}(t),$$

weil aufgrund der Linearität $\gamma'(t)(s) = \gamma'(t)(s \cdot 1) = s\gamma'(t)(1) = s\frac{d\gamma}{dt}(t)$. Identifiziert man $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbb{R}^n$ via

$$A \mapsto A(1),$$

so wird also $\gamma'(t)$ mit $\frac{d\gamma}{dt}(t)$ identifiziert. Es wird stets aus dem Zusammenhang klar sein, welche der zwei Bedeutungen von $\gamma'(t)$ gemeint ist.

Wir benötigen später die folgende Variante von Satz 20.6.

Lemma 21.12 *Es seien* $\|\cdot\|_E$ *und* $\|\cdot\|_F$ *Normen auf* $E := \mathbb{R}^n$ *bzw.* $F := \mathbb{R}^m$ *und* $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ *die entsprechende Operatornorm auf* $\mathbb{R}^{m\times n}$. *Es sei* $U \subseteq E$ *offen und* $f\colon U \to F$ *eine Lipschitz-stetige Funktion, die an einer Stelle* $x \in U$ *total differenzierbar ist. Dann gilt*

$$\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \mathrm{Lip}(f).$$

Beweis. Der Beweis von Satz 20.6 zeigt für jedes $y \in E$ die Abschätzung

$$\|D_y f(x)\|_F \leq \mathrm{Lip}(f)\|y\|_E$$

für die Richtungsableitung. Da $D_y f(x) = f'(x)(y)$, folgt

$$\|f'(x)(y)\|_F \leq \mathrm{Lip}(f)\|y\|_E \leq \mathrm{Lip}(f)$$

für alle $y \in E$ mit $\|y\|_E \leq 1$ und somit durch Übergang zum Supremum $\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \mathrm{Lip}(f)$. □

22 Strikte Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel führen wir einen spezielleren Begriff ein, der später für den Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion nützlich ist, nämlich *strikte* Differenzierbarkeit.[33] Wie wir sehen werden, ist strikte Differenzierbarkeit an einer Stelle eine stärkere Bedingung als dortige totale Differenzierbarkeit. Weiter ist eine Funktion genau dann überall strikt differenziebar, wenn sie stetig differenzierbar ist.

Definition 22.1 Es sei $E = \mathbb{R}^m$ mit einer Norm $\|\cdot\|_E$ und $F = \mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|_F$. Weiter sei $U \subseteq E$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f\colon U \to F$ wird *strikt differenzierbar* genannt an einer Stelle $x \in U$, wenn eine lineare Abbildung $f'(x)\colon E \to F$ derart existiert, dass das Restglied $R\colon U \to F$ der affin-linearen Approximation

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y) \tag{122}$$

für $y \in U$ die Bedingung

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) = 0$$

erfüllt.

Bemerkung 22.2 (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ muss also eine x-Umgebung $V \subseteq U$ existieren derart, dass $R|_V$ Lipschitz-stetig ist mit

$$\operatorname{Lip}(R|_V) \leq \varepsilon.$$

Sei f wie zuvor an der Stelle x strikt differenzierbar.

(b) Einsetzen von $y = x$ in (122) zeigt, dass $R(x) = 0$.

(c) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $r > 0$ derart, dass $B_r^E(x) \subseteq U$ und $\operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \leq \varepsilon$. Für alle $y \in B_r^E(x)$ mit $y \neq x$ gilt wegen $R(x) = 0$ dann

$$\frac{\|R(y)\|_F}{\|y - x\|_E} = \frac{\|R(y) - R(x)\|_F}{\|y - x\|_E} \leq \operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \leq \varepsilon.$$

[33] Vergleiche E. B. Leach, *A Note on inverse function theorems*, Proceedings of the American Mathematical Society **12** (1961), 694–697; N. Bourbaki, "Variéetés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats," Hermann, Paris, 1967; H. Cartan, "Calcul différentiel," Hermann, Paris, 1967.

Somit gilt

$$\lim_{y \to x} \frac{R(y)}{\|y - x\|_E} = 0,$$

d.h. f ist an der Stelle x total differenzierbar mit der gegebenen linearen Abbildung $f'(x)$ als Ableitung.

Satz 22.3 *Es seien $E := \mathbb{R}^m$ und $F = \mathbb{R}^n$ mit Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_F$. Weiter sei $U \subseteq E$ eine offene Menge und $f\colon U \to F$ eine Funktion. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) *f ist stetig differenzierbar.*

(b) *f ist an jeder Stelle $x \in U$ strikt differenzierbar.*

Beweis. Sei f eine C^1-Funktion. Gegeben $x \in U$ sei $R\colon U \to F$ das Restglied der affin-linearen Approximation

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + R(y) \tag{123}$$

für $y \in U$. Auflösen zeigt, dass

$$R(y) = f(y) - f(x) - f'(x)(y) + f'(x)(x). \tag{124}$$

Dies ist eine C^1-Funktion von y mit

$$R'(y) = f'(y) - f'(x).$$

Nach Lemma 20.6 ist also

$$\mathrm{Lip}(R|_V) = \sup\{\|R'(y)\|_{\mathrm{op}}\colon y \in V\} = \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon x \in V\} \tag{125}$$

für jede offene konvexe Teilmenge $V \subseteq U$. Da f' stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $B^E_\delta(x) \subseteq U$ derart, dass $\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon$ für alle $y \in B^E_\delta(x)$. Nach dem Vorigen ist dann

$$\mathrm{Lip}(R|_{B^E_\delta(x)}) \leq \varepsilon;$$

also gilt $\mathrm{Lip}(R|_{B^E_\delta(x)}) \to 0$ für $\delta \to 0$.

Sei umgekehrt f an jeder Stelle $x \in U$ strikt differenzierbar. Dann ist f an jeder Stelle $x \in U$ total differenzierbar, nach Bemerkung 22.2 (c). Sei

$R\colon U \to F$ das Restglied der affin-linearen Approximation (123). Wegen (124) ist R an jeder Stelle $y \in U$ total differenzierbar mit

$$R'(y) = f'(y) - f'(x).$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ gibt es ein $r > 0$ derart, dass $B_r^E(x) \subseteq U$ und

$$\operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \leq \varepsilon.$$

Nach Lemma 21.12 gilt für alle $y \in B_r^E(x)$ dann

$$\varepsilon \geq \operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \geq \|R'(y)\|_{\mathrm{op}} = \|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}}.$$

Also ist $f'\colon U \to (\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ stetig an der Stelle x und somit stetig, da $x \in U$ beliebig war. Folglich ist f eine FC^1-Funktion, also stetig differenzierbar. $\square$

23 Der Banachsche Fixpunktsatz

In desem Kapitel lernen wir den Banachschen Fixpunktsatz kennen, der in geeigenten Situationen die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts garantiert. Viele wichtige mathematische Probleme lassen sich als Fixpunktprobleme umformulieren und häufig ermöglicht der Banachsche Fixpunktsatz dann eine Lösung. Ein erstes Beispiel dafür lernen wir im nächsten Kapitel kennen, im Hinblick auf Lösbarkeit von Gleichungen. Eine zweite Anwendung ist die Konstruktion lokaler Lösungen von Differentialgleichungen gegen Ende der Vorlesung, in Kapitel 28.

Definition 23.1 Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Selbstabbildung $f\colon X\to X$ wird *Kontraktion* genannt, wenn ein $L\in [0,1[$ existiert mit

$$d(f(x),f(y))\leq L\,d(x,y)\quad \text{für alle } x,y\in X,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante $L<1$.

Eine Kontraktion hat höchstens einen Fixpunkt. Allgemeiner gilt:

Lemma 23.2 *Es sei (X,d) ein metrischer Raum, $U\subseteq X$ eine Teilmenge und $f\colon U\to X$ eine Lipschitz-stetige Abbldung mit einer Lipschitz-Konstante $L<1$. Sind $x_1,x_2\in U$ mit $f(x_1)=x_1$ und $f(x_2)=x_2$, so ist $x_1=x_2$.*

Beweis. Wäre $x_1\neq x_2$, so wäre $d(x_1,x_2)>0$; man erhielte den Widerspruch

$$d(x_1,x_2)=d(f(x_1),f(x_2))\leq L\,d(x_1,x_2)<d(x_1,x_2).$$

Also muss doch $x_1=x_2$ sein. □

Der Banachsche Fixpunktsatz (im Englischen *Banach's Fixed Point Theorem* oder *Contraction Mapping Principle*) lautet nun wie folgt:

Satz 23.3 (Banachscher Fixpunktsatz) *Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum mit $X\neq\emptyset$ und $f\colon X\to X$ eine Kontraktion mit Lipschitz-Konstante $L\in[0,1[$. Dann gilt folgendes:*

(a) *f hat genau einen Fixpunkt x_∞.*

(b) *Für jedes $x_0\in X$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)=x_\infty. \tag{126}$$

(c) *Die folgende* a priori Abschätzung *ist verfügbar: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$d(f^n(x_0), x_\infty) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(f(x_0), x_0). \tag{127}$$

Beweis. Gegeben $x_0 \in X$, setzen wir $x_n := f^n(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \tag{128}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, denn die Abschätzung ist trivial für $n = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq L\, d(x_n, x_{n-1}) \leq L^n d(x_1, x_0),$$

weil $d(x_n, x_{n-1}) \leq L^{n-1} d(x_1, x_0)$ per Induktionsannahme.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d(x_1, x_0); \tag{129}$$

unter wiederholter Benutzung der Dreiecksungleichung ist nämlich

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} L^k d(x_1, x_0) \\ &= L^n d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-1} L^j = L^n d(x_1, x_0) \frac{1-L^m}{1-L} \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0); \end{aligned}$$

hierbei beruht die erste Ungleichung auf (128), anschließend wurde die geometrische Summenformel benutzt. Aus (129) folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent ist [ist nämlich $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{L^N}{1-L} d(x_1, x_0) < \varepsilon;$$

für alle $k > n \geq N$ ist $k = n + m$ mit $m := k - n > 0$, also nach dem Vorigen

$$d(x_k, x_n) = d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0) \leq \frac{L^N}{1-L} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon.\,]$$

Wir definieren nun
$$x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n.$$
Dann ist x_∞ ein Fixpunkt von f, denn
$$f(x_\infty) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$
Lassen wir in (129) $m \to \infty$ streben, so erhalten wir (127). Die Eindeutigkeit des Fixpunkts wurde bereits in Lemma 23.2 gezeigt. $\square$

24 Der Satz über die Umkehrfunktion

Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ eine C^1-Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ und $x_0 \in U$, so kann man sich fragen, ob die Gleichung

$$f(x) = y$$

für y nahe $f(x_0)$ eine Lösung x nahe x_0 besitzt. Präziser: *Gibt es eine offene x_0-Umgebung $U_0 \subseteq U$ derart, dass $f(U_0)$ in $\mathbb{R}^N$ offen ist und*

$$f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$$

bijektiv?

Der Satz über die Umkehrfunktion beantwortet diese Frage:

Ist die Jacobimatrix

$$J_f(x_0) \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

invertierbar, so existiert U_0 und es ist $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$ nicht nur bijektiv, sondern zudem die Umkehrfunktion $(f|_{U_0})^{-1}\colon f(U_0) \to U_0 \subseteq \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar.

Satz 24.1 (Satz über die Umkehrfunktion) *Es sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ eine C^k-Funktion mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $x_0 \in U$ mit $J_f(x_0) \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ (so dass also $f'(x_0)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ invertierbar ist). Dann existiert eine offene x_0-Umgebung $U_0 \subseteq U$ derart, dass $f(U_0)$ offen in $\mathbb{R}^N$ und $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.*

Hierbei wurde die folgende Terminologie benutzt.

Definition 24.2 Seien $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und zudem $f\colon U \to V$ eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^N$. Ist f bijektiv und sind sowohl f als auch f^{-1} beides C^k-Abbildungen, so wird f ein C^k-*Diffeomorphismus* genannt.

Im Laufe des Kapitels werden wir den Satz über die Umkehrfunktion beweisen und hierbei zunächst eine quantitative Variante des Satzes kennenlernen, die oft nützliche zusätzliche Information liefert. Aber schauen wir zuerst ein Beispiel an.

Beispiel 24.3 Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = \Big(x_1 + \frac{1}{5}\cos(x_2), x_2 + \frac{1}{6}\cos(x_1)\Big).$$

Dann ist $f(0,0) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{6})$. *Hat die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in \mathbb{R}^2$ nahe $(\frac{1}{5}, \frac{1}{6})$ eine Lösung x?*

Die Antwort ist ja. Es ist nämlich

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5}\sin(x_2) \\ -\frac{1}{6}\sin(x_1) & 1 \end{pmatrix},$$

also $J_f(0,0) = \mathbf{1}_2$ die Einheitsmatrix. Da diese invertierbar ist, liefert der Satz über die Umkehrfunktion die lokale Invertierbarkeit von f nahe $(0,0)$: Es existiert eine offene $(0,0)$-Umgebung U_0 in $\mathbb{R}^2$ derart, dass $f(U_0)$ offen in $\mathbb{R}^2$ (und somit eine Umgebung $(\frac{1}{5}, \frac{1}{6})$ ist) und $f|_{U_0}\colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^∞-Diffeomorphismus.

Hintergrund: Vereinfachtes Newton-Verfahren

In der Analysis möchte man oft Nullstellen einer Funktion f finden.[34] Wir gehen kurz auf numerische Lösungsverfahren ein, da ihre Kenntnis ein Verständnis des Beweises des Satzes über die Umkehrfunktion erleichtert.

24.4 Ist $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine affin-lineare Funktion der Form

$$f(x) = \alpha(x) + b$$

mit $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ und $b \in \mathbb{R}^N$, so ist f bijektiv und es gibt genau eine Nullstelle, nämlich $x_1 := -\alpha^{-1}(b)$; gegeben ein $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und den Funktionswert $f(x_0) = \alpha(x_0) + b$ können wir diese berechnen als

$$x_1 = x_0 - \alpha^{-1}(f(x_0)),$$

wie man sofort verifiziert.

24.5 Hat eine C^1-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Nullstelle, so kann man versuchen, diese mit dem Newton-Verfahren zu berechnen (das Sie im Falle von Funktionen einer Variablen vielleicht aus der

[34] Oder Lösungen zu $f(x) = y$, die sich als Nullstellen von $f(x) - y$ interpretieren lassen.

Schule kennen). Ausgehend von einem $x_0 \in U$ mit $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ wendet man das obige Vorgehen auf die affin-lineare Approximation

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{130}$$

von f um x_0 an und erhält den Punkt

$$x_1 := x_0 - f'(x_0)^{-1}(f(x_0)),$$

der eine Nullstelle der affin-linearen Abbildung (130), aber nicht unbedingt von f ist. Im *Newton-Verfahren* fährt man fort und benutzt nun (wenn $x_1 \in U$ und $f'(x_1)$ invertierbar ist) die übliche affin-lineare Approximation

$$x \mapsto f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

von f um x_1 zur Berechnung von deren Nullstelle,

$$x_2 := x_1 - f'(x_1)^{-1}(f(x_1)),$$

und so fort.

24.6 Im Falle eines *vereinfachten Newton-Verfahrens* halten wir die lineare Abbildung $f'(x_0)$ fest und benutzen die (schlechtere, unübliche) affin-lineare Approximation

$$x \mapsto f(x_1) + f'(x_0)(x - x_1)$$

von f um x_1 zur Bestimmung von deren Nullstelle

$$x_2 := x_1 - f'(x_0)^{-1}(f(x_1))$$

und so fort, immer mit $f'(x_0)$.

24.7 Sucht man c-Stellen von f (mit $c \in \mathbb{R}^N$), so sind dies Nullstellen von $g\colon U \to \mathbb{R}^N$, $x \mapsto f(x) - c$ mit $g'(x_0) = f'(x_0)$. Wendet man das vereinfachte Newton-Verfahren auf g statt f an, so ist

$$x_{n+1} := x_n - f'(x_0)^{-1}(f(x_n) - c).$$

24.8 Allgemeiner kann man im vereinfachten Newton-Verfahren aus 24.7 (unter geeigneten Voraussetzungen) an Stelle von $f'(x_0)$ mit einer fest gewählten invertierbaren linearen Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ arbeiten, so dass zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^N$ also rekursiv für $n \in \mathbb{N}_0$

$$x_{n+1} := x_n - \alpha^{-1}(f(x_n) - y).$$

Wir werden die Varianten 24.7 und 24.8 im Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion benutzen. Der Beweis ist jedoch in sich geschlossen: Vorkenntnisse über das Newton-Verfahren und Varianten sind nicht von Nöten.

Hilfsmittel: Quantitativer Satz über Umkehrfunktion

Wir formulieren nun eine quantitative Fassung des Satzes über die Umkehrfunktion (aus welcher die obige klassische Fassung des Satzes anschließend leicht folgt). Differenzierbarkeit spielt zunächst keine Rolle; vielmehr betrachten wir Lipschitz-Störungen linearer Automorphismen, also Abbildungen der Art

$$x \mapsto \alpha(x) + g(x)$$

mit $\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^N)$ und einer Lipschitz-stetigen Abbildung g.

Satz 24.9 (Quantitativer Satz über die Umkehrfunktion) *Sei* $E := \mathbb{R}^N$ *mit* $N \in \mathbb{N}$ *und einer Norm* $\|\cdot\|$. *Sei weiter* $\alpha \in \mathrm{GL}(E)$, $x \in E$, $r > 0$ *und* $g\colon B_r^E(x) \to E$ *eine Lipschitz-stetige Abbildung derart, dass*

$$\mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}};$$

es ist also

$$a := \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(g) > 0.$$

Dann hat die Abbildung $f\colon B_r^E(x) \to E$, $y \mapsto \alpha(y) + g(y)$ *folgende Eigenschaften:*

(a) *Das Bild* $f(B_r^E(x))$ *ist offen in* E *und* $f\colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ *ist ein Homöomorphismus.*

(b) *Die Umkehrabbldung* $f^{-1}\colon f(B_r^E(x)) \to B_r^E(x)$ *ist Lipschitz-stetig mit*

$$\mathrm{Lip}(f^{-1}) \leq \frac{1}{a}.$$

(c) *Setzen wir* $h := f^{-1} - \alpha^{-1}$, *so ist* $f^{-1} = \alpha^{-1} + h$ *und* $h\colon f(B_r^E(x)) \to E$ *ist Lipschitz-stetig mit*

$$\mathrm{Lip}(h) \leq \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{Lip}(g)}{a}. \tag{131}$$

(d) *Setzen wir* $b := \|\alpha\|_{\mathrm{op}} + \mathrm{Lip}(g)$, *so ist*

$$a\|z-y\| \leq \|f(z) - f(y)\| \leq b\|z-y\| \quad \text{für alle } y, z \in B_r^E(x).$$

(e) *Es gelten folgende Abschätzungen für die Bilder von Kugeln:*

$$B^E_{ar}(f(x)) \subseteq f(B^E_r(x)) \subseteq B^E_{br}(f(x))$$

und allgemeiner

$$B^E_{as}(f(y)) \subseteq f(B^E_s(y)) \subseteq B^E_{bs}(f(y)) \tag{132}$$

für alle $y \in B^E_r(x)$ *und* $0 < s \leq r - \|y - x\|$.

(f) *Ist* $\|f(x)\| < ar$, *so hat* f *genau eine Nullstelle.*

(g) *Ist* f *zudem eine* C^k*-Abbildung mit* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *so ist auch* $f^{-1}\colon f(B^E_r(x)) \to E$ *eine* C^k*-Abbildung (also* $f\colon B^E_r(x) \to f(B^E_r(x))$ *ein* C^k*-Diffeomorphismus).*

Beweis. Sei $L := \mathrm{Lip}(g)$; dann ist also

$$a + L = \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}. \tag{133}$$

(d) Für alle $y, z \in B^E_r(x)$ gilt

$$\|f(z) - f(y)\| = \|\alpha(z - y) + g(z) - g(y)\|, \tag{134}$$

somit $\|f(z) - f(y)\| \leq (\|\alpha\|_{\mathrm{op}} + L)\|z - y\|$ unter Benutzung der Dreiecksungleichung. Anwenden der umgekehrten Dreiecksungleichung auf die rechte Seite von (134) liefert

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(y)\| &\geq \|\alpha(z - y)\| - \|g(z) - g(y)\| \\ &\geq \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}\|z - y\| - \mathrm{Lip}(g)\|z - y\| = a\|z - y\|, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Ungleichung (104) benutzt wurde und die Lipschitz-Stetigkeit von g.

(b) Aus der Abschätzung nach unten in (d) folgt, dass f injektiv ist. Sind $v, w \in f(B^E_r(x))$, so ist $v = f(y)$ und $w = f(z)$ mit $y := f^{-1}(v)$ und $z := f^{-1}(w)$. Nach (d) gilt dann $\|f^{-1}(w) - f^{-1}(v)\| = \|z - y\| \leq \frac{1}{a}\|f(z) - f(y)\| = \frac{1}{a}\|w - v\|$. Also ist $\mathrm{Lip}(f^{-1})\| \leq \frac{1}{a}$.

(e) Seien y und s wie in (132). Die zweite Inklusion in (132) gilt nach (d). Um die erste zu beweisen, brauchen wir nur

$$\overline{B}^E_{at}(f(y)) \subseteq f(\overline{B}^E_t(y))$$

zu zeigen für alle $0 < t < r - \|y - x\|$. Hierzu sei $c \in \overline{B}_{at}^E(f(y))$; wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h_c\colon \overline{B}_t^E(y) \to E, \quad z \mapsto z - \alpha^{-1}(f(z) - c).$$

Es ist $h_c(z) \in \overline{B}_t^E(y)$ für alle $z \in \overline{B}_t^E(y)$, da

$$\begin{aligned} \|h_c(z) - y\| &= \|\alpha^{-1}(\alpha(z) - \alpha(y) - f(z) + c)\| \\ &= \|\alpha^{-1}(-g(z) + g(y) - f(y) + c)\| \\ &\leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}(L\|z - y\| + \|c - f(y)\|) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}(Lt + at) \leq t \end{aligned}$$

wegen (133). Zudem ist $h_c\colon \overline{B}_t^E(y) \to \overline{B}_t^E(y)$ eine Kontraktion, denn es ist

$$\begin{aligned} \|h_c(z) - h_c(v)\| &= \|\alpha^{-1}(\alpha(z) - \alpha(v) - f(z) + f(v))\| \\ &= \|\alpha^{-1}(g(v) - g(z))\| \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L\|z - v\| \end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{Lip}(h_c) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L < 1. \tag{135}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein $z \in \overline{B}_t^E(y)$ derart, dass

$$z = h_c(z) = z - \alpha^{-1}(f(z) - c)$$

und somit $c = f(z)$.

(a) Nach (b) ist $f\colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ ein Homöomorphismus. Die erste Inklusion in (132) zeigt, dass $f(B_r^E(x))$ um jeden Punkt eine Kugel enthält und somit offen ist.

(c) Es ist $\mathrm{id} = f^{-1} \circ f = (\alpha^{-1} + h) \circ (\alpha + g) = \mathrm{id} + \alpha^{-1} \circ g + h \circ f$ und somit $h \circ f = -\,\alpha^{-1} \circ g$, also

$$h = -\,\alpha^{-1} \circ g \circ f^{-1}.$$

Folglich ist $\mathrm{Lip}(h) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \mathrm{Lip}(g) \mathrm{Lip}(f^{-1})$. Schätzen wir $\mathrm{Lip}(f^{-1})$ wie in (b) nach oben ab, so folgt (131).

(f) Ist $\|f(x)\| < ar$, so ist $0 \in B_{ar}^E(f(x))$ und somit $0 \in f(B_r^E(x))$, nach (e). Also hat f eine Nullstelle. Diese ist eindeutig, weil f injektiv ist.

(g) wird am Ende des Kapitels bewiesen und vorher nicht benutzt. $\square$

Beweis von Satz 24.1

Zum Beweis des klassischen Satzes über die Umkehrfunktion benötigen wir noch einen Hilfssatz, um die höheren Differerenzierbarkeitseigenschaften zu erhalten.

Lemma 24.10 *Es sei $U \subseteq E := \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ eine C^k-Funktion derart, dass $f(U)$ in R^N offen ist und $f\colon U \to f(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist f^{-1} eine C^k-Funktion, also $f\colon U \to f(U)$ ein C^k-Diffeomorphismus. Weiter gilt $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$ für alle $x \in U$ und*

$$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1}, \tag{136}$$

also auch

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \quad \textit{für alle } y \in f(U). \tag{137}$$

Beweis. Es ist $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$ und somit nach der Kettenregel

$$(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}_E$$

für alle $x \in U$. Weiter ist $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(U)}$ und Ableiten liefert mit der Kettenregel $f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}_E$ für $y \in f(U)$. Setzen wir $y := f(x)$ mit $x \in U$, so ist also

$$f'(x) \circ (f^{-1})'(f(x)) = \mathrm{id}_E\,.$$

Nach dem Vorigen ist $(f^{-1})'(f(x))$ eine Rechts- und Linksinverse zu $f'(x)$. Also ist $f'(x)$ invertierbar mit $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x)$; somit gilt (136). Setzen wir $x := f^{-1}(y)$ in (136) ein zu gegebenem $y \in f(U)$, so erhalten wir (137).

Für die entsprechenden Jacobi-Matrizen wird aus (137)

$$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(f^{-1}(y)))^{-1}$$

für alle $y \in f(U)$. Unter Benutzung der Abbildung

$$j\colon\ \mathrm{GL}_N(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^{-1},$$

die Matrizen invertiert, ist also

$$J_{f^{-1}} = j \circ J_f \circ f^{-1}. \tag{138}$$

Wir erinnern daran, dass j eine C^∞-Funktion ist (siehe Kapitel 19).

Um zu zeigen, dass die Umkehrfunktion C^k ist, dürfen wir $k \in \mathbb{N}$ annehmen und benutzen vollständige Induktion. Die Aussage im Fall $k = 1$, dass $f^{-1}\colon U \to f(U)$ eine C^1-Diffeomorphismus ist, gilt per Voraussetzung.

Induktionsschritt: Sei f^{-1} per Induktionsannahmen bereits C^{k-1}. Dann ist $J_{f^{-1}}\colon U \to \mathbb{R}^{N\times N}$ nach (138) eine Komposition von C^{k-1}-Funktionen und somit C^{k-1} nach der Kettenregel. Da f^{-1} eine C^1-Funktion ist und J_{f-1} eine C^{k-1}-Funktion, ist f^{-1} eine C^k-Funktion und somit f ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

Beweis von Satz 24.1. Wir setzen $E := \mathbb{R}^N$ und halten eine Norm $\|\cdot\|$ auf E fest. Da f stetig differenzierbar ist, ist f an der Stelle x_0 (und überall) strikt differenzierbar; für das Restglied

$$R\colon U \to \mathbb{R}^N$$

in der affin-linearen Approximation

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x) \tag{139}$$

gilt also

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x_0)}) = 0$$

(siehe Satz 22.3). Zusammenfassen aller Summanden in (139) außer $f'(x_0)(x)$ liefert

$$f(x) = f'(x_0)(x) + g(x)$$

mit der Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^N$,

$$x \mapsto f(x_0) - f'(x_0)(x_0) + R(x).$$

Wir kürzen ab

$$g_r := g|_{B_r^E(x_0)}.$$

Da sich g_r und $R|_{B_r^E(x_0)}$ nur um eine additive Konstante unterscheiden, gilt

$$\operatorname{Lip}(g_r) = \operatorname{Lip}(R|_{B_r^E(x_0)} \to 0$$

für $r \to 0$. Insbesondere gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\operatorname{Lip}(g_r) < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} \tag{140}$$

für alle $r \in]0, \varepsilon]$. Wir setzen

$$U_0 := B_\varepsilon^E(x_0).$$

Nach dem quantitativen Satz über die Umkehrfunktion ist dann $f(U_0)$ offen in $\mathbb{R}^N$ und

$$f|_{U_0} \colon U_0 \to f(U_0)$$

ein Homöomorphismus. Für jedes $r \in]0, \varepsilon]$ ist

$$V_\varepsilon := f(B_r^E(x_0))$$

also eine offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ in $\mathbb{R}^N$ und nach dem quantitativen Satz über die Umkehrfunktion ist

$$(f|_{U_0})^{-1}|_{V_r} = (f|_{B_r^E(x_0)})^{-1} = f'(x_0)^{-1} + h_r$$

mit

$$\mathrm{Lip}(h_r) \leq \frac{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \,\mathrm{Lip}(g_r)}{\frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(g_r)} \to \frac{0}{\frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - 0} = 0$$

für $r \to 0$. Schreiben wir

$$(f|_{U_0})^{-1}(y) = x_0 + f'(x_0)^{-1}(y - y_0) + S(y),$$

so unterscheidet sich für $y \in V_r$ das Restglied

$$S(y) = h_r(y) - x_0 + f'(x_0)^{-1}(y_0)$$

nur um eine additive Konstante von $h_r(y)$. Folglich gilt

$$\mathrm{Lip}(S|_{V_r}) = \mathrm{Lip}(h_r) \to 0$$

für $r \to 0$, so dass $(f|_{U_0})^{-1}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ strikt differenzierbar ist.

Wir behaupten, dass die Umkehrfunktion

$$(f|_{U_0})^{-1} \colon f(U_0) \to U_0 \subseteq \mathbb{R}^N$$

an jeder Stelle $y \in f(U_0)$ strikt differenzierbar ist. Nach Satz 22.3 ist sie also C^1 und somit nach Lemma 24.10 eine C^k-Funktion, also $f|_{U_0} \colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus, was den Beweis beendet.

Zum Beweis der Behauptung erinnern wir daran, dass

$$\sup\{\|f'(x) - f'(x_0)\|_{\mathrm{op}} \colon x \in U_0\} = \mathrm{Lip}(R|_{U_0})$$

(siehe (125)), wobei $\mathrm{Lip}(R|_{U_0}) < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ nach (140). Gegeben $y \in f(U_0)$ sei $x \in U_0$ mit $f(x) = y$. Zum gegebenen x zeigt die vorige Gleichung, dass

$$\|f'(x) - f'(x_0)\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}.$$

Nach Lemma 19.14(b) ist somit $f'(x) \in \mathrm{GL}(E)$, also $J_f(x) \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Somit kann x die Rolle von x_0 spielen im vorigen Beweis und wir erhalten eine offene x-Umgebung $W \subseteq U_0$, so dass $(f|_W)^{-1}$ an der Stelle $f(x)$ strikt differenzierbar ist. Da

$$(f|_W)^{-1} = (f|_{U_0})^{-1}|_{f(W)},$$

ist also auch $(f|_{U_0})^{-1}$ an der Stelle $f(x) = y$ strikt differenzierbar und die Behauptung bewiesen, was den Beweis beendet. $\square$

Beweis von Satz 24.9 (g). Die Funktion $g = f - \alpha$ ist C^k und für alle $y \in B_r^E(x)$ haben wir

$$\|g'(y)\|_{\mathrm{op}} \leq \mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

nach Satz 20.6. Sei $z \in f(B_r^E(x))$ und $y \in B_r^E(x)$ mit $f(y) = z$. Nach dem Vorigen ist $f'(y) = \alpha + g'(y) \in \mathrm{GL}(E)$, nach Lemma 19.14 (b). Nach Satz 24.1 gibt es also eine offene y-Umgebung $U_0 \subseteq B_r^E(x)$ derart, dass $f(U_0)$ eine offene Umgebung von $z = f(y)$ in E ist und $f|_{U_0} \colon U_0 \to f(U_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus. Also ist $f^{-1}|_{f(U_0)} = (f|_{U_0})^{-1}$ eine C^k-Abbildung. Somit ist f^{-1} eine C^k-Abbildung, folglich $f \colon B_r^E(x) \to f(B_r^E(x))$ ein C^k-Diffeomorphismus. $\square$

25 Der Satz über implizite Funktionen

Manchmal kennen wir bereits eine Lösung (x_0, y_0) einer nicht-linearen Gleichung $f(x, y) = 0$ und fragen uns, ob für x nahe x_0 ein $y = y(x)$ nahe y_0 mit $f(x, y) = 0$ existiert und eindeutig festgelegt ist, so dass also die Funktion $x \mapsto y(x)$ implizit durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist. Beispielsweise ist $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ eine Lösung von

$$x + y + \sin(xy) = 0,$$

wir sehen aber vielleicht nicht unmittelbar, wie wir hier nach y auflösen können. Mit den Methoden der Differentialrechnung erhalten wir eine hinreichende Bedingung.

Satz 25.1 *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, $f\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$ eine C^k-Abbildung mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $(x_0, y_0) \in U \times V$ eine Nullstelle von f derart, dass $(f_{x_0})'(y_0) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ gilt für die Funktion $f_{x_0} := f(x_0, \cdot)\colon V \to \mathbb{R}^m$, also*

$$J_{f_{x_0}}(y_0) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}). \tag{141}$$

Dann gibt es eine offene Umgebung U_0 von x_0 in U und eine offene Umgebung V_0 von y_0 in V derart, dass die Nullstellenmenge von $f|_{U_0 \times V_0}$ ein Graph ist:

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x, y) = 0\} = \mathrm{graph}(\phi)$$

mit einer C^k-Funktion $\phi\colon U_0 \to V_0$.

Bemerkung 25.2 Wenn $m = 1$ ist in der Situation von Satz 25.1, so ist $\mathbb{R}^{m \times m} \cong \mathbb{R}$ die Algebra der 1×1-Matrizen und eine solche Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie nicht die Nullmatrix ist. Also ist $J_{f_{x_0}}(y_0) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ genau dann invertierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{142}$$

Im Falle $m = 1$ dürfen Sie die Bedingung (141) also einfach durch (142) ersetzen.

Beispiel 25.3 Der Einheitskreis $\mathbb{S} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Es ist also $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = 0\}$ mit der C^∞-Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1.$$

Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}$. Ist $y_0 > 0$, so ist die Menge von Nullstellen von f in $]-1,1[\times]0,\infty[$ der Graph

$$\{(x, \sqrt{1-x^2}) \colon x \in]-1,1[\}$$

der C^∞-Funktion $]-1,1[\to]0,\infty[$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Auch sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen (in der Form (142)) erfüllt: es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0.$$

Ist $y_0 < 0$, so ist die Menge von Nullstellen von f in $]-1,1[\times]-\infty,0[$ der Graph

$$\{(x, -\sqrt{1-x^2}) \colon x \in]-1,1[\}$$

der C^∞-Funktion $]-1,1[\to]0,\infty[$, $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ und wieder ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$ erfüllt.

Ist $y_0 = 0$, so ist $(x_0, y_0) = (1,0)$ oder $(x, y_0) = (-1,0)$. Wir diskutieren den Fall $(x_0, y_0) = (1,0)$ (der andere lässt sich analog diskutieren). Die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind nun nicht erfüllt, denn es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Und nahe $(1,0)$ ist die Nullstellenmenge von f kein Graph. Ist nämlich $U_0 \subseteq \mathbb{R}$ eine offene 1-Umgebung und $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ eine offene 0-Umgebung, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq V_0$ und ein $\delta > 0$ mit $]1-\delta, 1+\delta[\subseteq U_0$. Nach Verkleinern von δ dürfen wir $\sqrt{1-(1-\delta)^2} < \varepsilon$ annehmen. Sei $x \in]1-\delta, 1[$. Dann ist $\sqrt{1-x^2} \neq -\sqrt{1-x^2}$ und es sind

$$(x, \sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{S} \cap (U_0 \times V_0) \quad \text{sowie} \quad (x, -\sqrt{1-x^2}) \in \mathbb{S} \cap (U_0 \times V_0).$$

Also kann $\mathbb{S} \cap (U_0 \times V_0)$ kein Graph eine Funktion $\phi \colon U_0 \to V_0$ sein. Weiter gibt es zu $x \in]1, 1+\delta[$ kein $y \in V_0$ mit $(x,y) \in \mathbb{S}$, denn es ist $f(x,y) =$

$x^2+y^2-1 \geq x^2-1 > 0$. Auch daraus können wir schließen, dass $\mathbb{S}\cap(U_0\cap V_0)$ kein Graph einer auf U_0 definierten Funktion ist.

Beachten Sie, dass wir für y nahe 0 jedoch $(\sqrt{1-y^2}, y) \in \mathbb{S}$ haben, d.h. die Sphäre ist nahe $(1,0)$ Graph einer Funktion von y. Um diese Beobachtung auch mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen reproduzieren zu können, setzen wir $g(y,x) := f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und wenden den Satz auf g an Stelle von f an.

Beispiel 25.4 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x + y + \sin(xy) = 0$$

für jedes x nahe 0 eine Lösung (x,y) besitzt.

Zum Nachweis betrachten wir die C^∞-Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + y + \sin(xy).$$

Dann ist $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + x\cos(xy)$, somit $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Also ist (142) erfüllt. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es 0-Umgebungen $U_0 \subseteq \mathbb{R}$ und $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass

$$\{(x,y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x,y) = 0\} = \operatorname{graph}(\phi)$$

für eine C^∞-Funktion $f\colon U_0 \to V_0$. Insbesondere hat die Gleichung

$$x + y + \sin(xy) = f(x,y) = 0$$

für jedes $x \in U_0$ eine Lösung, nämlich $(x, \phi(x))$.

Folgende Beobachtung über Blockmatrizen nutzt im Beweis von Satz 25.1.

Lemma 25.5 *Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ und $\beta \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist die Blockmatrix*

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

eine invertierbare Matrix.

Beweis. Wir setzen

$$B := \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ -\gamma^{-1}\beta\alpha^{-1} & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Man rechnet direkt nach, dass $AB = BA = \mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist. Also ist A invertierbar mit $A^{-1} = B$. $\square$

Beweis von Satz 25.1. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y));$$

diese ist C^k, weil beide Komponenten (die Projektion $U \times V \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x$ und f) es sind. Die Jacobi-Matrix von g an der Stelle (x_0, y_0) ist

$$J_g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \beta & J_{f_{x_0}}(y_0) \end{pmatrix},$$

wobei $\beta := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist. Nach Lemma 25.5 ist $J_g(x_0, y_0)$ eine invertierbare Matrix. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion existiert also eine offene Umgebung W von (x_0, y_0) in $U \times V$ derart, dass $g(W)$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $g|_W\colon W \to g(W)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Da $U \times V$ die Produkttopologie trägt, finden wir eine offene x_0-Umgebung $P \subseteq U$ und eine offene y_0-Umgebung $V_0 \subseteq V$ derart, dass

$$P \times V_0 \subseteq W;$$

dann ist $g(P \times V_0)$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $g|_{P\times V_0}\colon P \times V_0 \to g(P \times V_0)$ ein C^k-Diffeomorphismus. Da nun $g(P \times V_0)$ eine offene Umgebung von $f(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist, gibt es eine offene x_0-Umgebung $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine offene 0-Umgebung $O \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass

$$U_0 \times O \subseteq g(P \times V_0).$$

Jedes $x \in U_0$ ist eine erste Komponente von $(x, 0) = g(z, y)$ mit einem $(z, y) \in P \times V_0$; also ist $x = z \in P$ und folglich $U_0 \subseteq P$. Weiter gilt

$$g(U_0 \times V_0) \supseteq U_0 \times O; \tag{143}$$

ist nämlich $(x', y') \in U_0 \times O$ und $(x, y) \in P \times V_0$ mit $g(x, y) = (x', y')$, so ist $x = x' \in U_0$, also $(x', y') = g(x', y) \in g(U_0 \times V_0)$.

Gegeben $x \in U_0$ gibt es nach (143) ein $(z, y) \in U_0 \times V_0$ mit $(x, 0) = g(z, y)$; da $g(z, y) = (z, f(z, y))$, ist $z = x$ und $f(x, y) = 0$. Ist auch $y' \in V_0$ mit $f(x, y') = 0$, so ist $g(x, y') = (x, f(x, y')) = (x, 0) = g(x, y)$, also $y = y'$ da $g|_{U_0 \times V_0}$ injektiv ist. Da y nach dem Vorigen eindeutig ist, können wir $\phi(x) := y$ setzen und erhalten

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x, y) = 0\} = \operatorname{graph}(\phi).$$

Aus $(x, 0) = g(x, y)$ folgt aber

$$(x, y) = (g|_W)^{-1}(x, 0)$$

und somit $\phi(x) = y = (\operatorname{pr}_2 \circ (g|_W)^{-1})(x, 0)$ mit $\operatorname{pr}_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(a, b) \mapsto b$. Da $(g|_W)^{-1}$ eine C^k-Funktion ist, ist auch ϕ eine C^k-Funktion. $\square$

Bemerkung 25.6 Im Fall $m = 1$ gilt für die Funktion $\phi \colon U_0 \to V_0$ im Satz über implizite Funktionen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))} \tag{144}$$

für alle $x \in U_0$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Insbesondere gilt wegen $\phi(x_0) = y_0$ im Spezialfall $x = x_0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_0) \;=\; -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. In der rechten Seite kommt ϕ nicht mehr vor, nur noch Funktionswerte von f und seinen partiellen Ableitungen.

Beweis von (144): Die Funktion

$$h \colon U_0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x, \phi(x))$$

erfüllt

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x, \phi(x)) = \left(e_j, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\right)$$

mit den Standard-Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$. Da $f(h(x)) = f(x, \phi(x)) = 0$ für alle x, folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial (f \circ h)}{\partial x_j}(x) = (f \circ h)'(x)(e_j) = f'(h(x))(h'(x)(e_j)) \\
&= f'(h(x)) \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \right) = J_f(h(x)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \\
&= \langle \nabla f(h(x)), (e_j, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) \rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x).
\end{aligned}
$$

Auflösen nach $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$ liefert (144). $\square$

26 Extrema unter Nebenbedingungen

Wir studieren nun lokale (und globale) Extremalstellen einer Funktion f unter einer Nebenbedingung $g(x) = 0$, also lokale (bzw. globale) Extremalstellen von $f|_M$, wobei

$$M := g^{-1}(\{0\})$$

die Nullstellenmenge von g ist.

Satz 26.1 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $n \in \mathbb{N}$ und $g\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion derart, dass*

$$\nabla g(p) \neq 0$$

für alle $p \in M := g^{-1}(\{0\})$. Ist $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $p \in M$ eine lokale Minimalstelle von $f|_M$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla f(p) = \lambda \, \nabla g(p).$$

Man nennt λ einen *Lagrangeschen Multiplikator.*

Beispiel 26.2 Finde die globalen Extremalstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung: Setzen wir $g(x,y) := 1 - x^2 - y^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\},$$

so suchen wir globale Extremalstellen p von $f|_M$. Diese sind insbesondere lokale Extremalstellen; nach Satz 26.1 muss es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben derart, dass

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p). \tag{145}$$

[Beachten Sie, dass $\nabla g(p) = (-2x, -2y) = -2p \neq (0,0)$ für jedes $p = (x,y) \in M$, da $p \neq (0,0)$.]

Wir schauen daher erst einmal, für welche $p = (x,y) \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (145) gilt; dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Dies erfordert $x, y, \lambda \neq 0$ und ist dann äquivalent zu

$$-2\lambda y = 2 = 2(-2\lambda x) = -4\lambda x,$$

also $x = y/2$. Weiter ist $(y/2, y) \in M$ genau dann, wenn $y^2/4 + y^2 = 1$, also $y^2 = 4/5$, also $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Nun ist

$$f\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\Big) = \sqrt{5}$$

und $f(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\sqrt{5}$. Da M kompakt ist und somit die stetige Funktion $f|_M$ ein Maximum und ein Minimum annehmen muss, ist $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ die globale Maximalstelle von $f|_M$ und $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$ die globale Minimalstelle.

26.3 Gegeben $v \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \colon \langle v, w\rangle = 0\}$. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere Teilmenge, so setzen wir

$$V^\perp := \bigcap_{v \in V} v^\perp.$$

Dann ist $V^\perp$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Ist $U \subseteq V$, so ist $U^\perp \supseteq V^\perp$. Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, so ist $(V^\perp)^\perp = V$. Weiter ist $(v^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$ (siehe lineare Algebra).

26.4 Als Vorbereitung für den Beweis von Satz 26.1 definieren wir den *Tangentialraum* T_pM der Hyperfläche $M := g^{-1}(\{0\})$ in $\mathbb{R}^n$ an der Stelle $p \in M$ als die Menge aller Ableitungsvektoren

$$\gamma'(0)$$

für $\varepsilon > 0$ und C^1-Wege $\gamma \colon\,]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq M$.

Lemma 26.5 *Es ist* $T_pM = \ker g'(p) = (\nabla g(p))^\perp$. *Insbesondere ist* T_pM *ein* $(n-1)$*-dimensionaler Untervektorraum von* $\mathbb{R}^n$. *Weiter ist* $\ker g'(p)$ *durch* M *eindeutig festgelegt.*

Beweis. Sei $p = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in M$. Gegeben $v \in T_pM$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $\gamma \colon\,]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq M$, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Da $g \circ \gamma = 0$, liefert die Kettenregel

$$g'(p)(v) = g'(\gamma(0))(\gamma'(0)) = (g \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Also ist $T_pM \subseteq \ker g'(p)$.

Gegeben $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$g'(p)(v) = J_g(p)v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(p) v_j = \langle \nabla g(p), v \rangle,$$

somit $v \in \ker g'(p)$ genau dann, wenn $v \in (\nabla g(p))^{\perp}$.

Wir nutzen nun aus, dass $\nabla g(p) \neq 0$; es gibt also ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass $\frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0$.

1. Fall: Ist $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$, so gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine offene $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})$-Umgebung $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und eine offene $\bar{x}_n$-Umgebung $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass $U_0 \times V_0 \subseteq U$ und

$$M \cap (U_0 \times V_0) = \{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon g(x, y) = 0\} = \operatorname{graph}(\phi)$$

für eine C^1-Funktion $\phi \colon U_0 \to V_0$. Also ist $h(x) := (x, \phi(x)) \in M$ für alle $x \in U_0$. Weiter ist

$$h \colon U_0 \to \mathbb{R}^n, \quad h(x) = (x, \phi(x))$$

stetig differenzierbar. Gegeben $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist $\gamma(t) := h((\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}) + ty) \in M$ für $|t|$ klein, also

$$h'(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})(y) = \gamma'(0) \in T_pM.$$

Also ist $V := h'(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n_1})(\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq T_pM$. Ist $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1})$ die Projektion, so ist

$$\pi(V) = (\pi \circ h)'(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1})(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1};$$

der Vektorraum V hat also Dimension $\dim(V) \geq n - 1$. Da

$$V \subseteq T_pM \subseteq \ker g'(p)$$

und $\ker g'(p)$ wegen $g'(p) \neq 0$ Dimension $n-1$ hat, folgt $V = T_pM = \ker g'(p)$.

Fall 2: Ist $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) = 0$, so ist $\frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Diesen Fall führt man durch eine Permutation der Koordinaten auf Fall 1 zurück.

[Details: Es sei $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Isomorphismus von Vektorräumen, der e_n und e_j vertauscht und alle Standard-Einheitsvektoren e_i mit $\in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, n\}$ festhält. Sei $W := \alpha^{-1}(U)$. Dann ist

$$h := g \circ \alpha\colon W \to \mathbb{R}$$

eine C^1-Funktion mit Nullstellenmenge $N := h^{-1}(\{0\}) = \alpha^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = \alpha^{-1}(M)$ und $h'(q) = g'(\alpha(q)) \circ \alpha \neq 0$ für alle $q \in N$. Weiter gilt für $q := \alpha^{-1}(p)$

$$\frac{\partial h}{\partial x_n}(q) = h'(q)(e_n) = g'(p)(\alpha(e_n)) = g'(p)(e_j) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(p) \neq 0;$$

nach Fall 1 ist also $T_q N = \ker h'(q)$. Nun ist $\alpha(T_q N) = T_p M$. Ist nämlich $v \in T_q N$, so existiert eine auf einem Intervall um 0 definierte C^1-Abbildung γ nach $\mathbb{R}^n$ mit Bild in N und $\gamma(0) = q$ sowie $\gamma'(0) = v$. Dann hat $\alpha \circ \gamma$ Bild in M und es ist $\alpha(\gamma(0)) = p$ und

$$T_p M \ni (\alpha \circ \gamma)'(0) = \alpha(\gamma'(0)) = \alpha(v);$$

also ist $\alpha(T_q N) \subseteq T_p M$. Analog sieht man, dass $\alpha^{-1}(T_p M) \subseteq T_q N$, so dass also $\alpha(T_q N) = T_p M$. Da $h'(q) = g'(p) \circ \alpha$, folgern wir

$$\ker g'(p) = \ker(h'(q) \circ \alpha^{-1}) = \alpha(\ker h'(q)) = \alpha(T_q N) = T_p M,$$

was den Beweis beendet.] □

Beweis von Satz 26.1. Sei $p \in M$ eine lokale Extremalstelle von $f|_M$. Gegeben $v \in T_p M$ sei γ eine auf einer offenen 0-Umgebung in $\mathbb{R}$ definierte C^1-Funktion nach $\mathbb{R}^n$ mit Bild in M derart, dass $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist 0 eine lokale Extremalstelle von $f \circ \gamma$, somit nach Analysis 1

$$0 = (f \circ \gamma)'(0) = f'(p)(\gamma'(0)) = f'(p)(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

Also ist $\nabla f(p) \in v^\perp$ für alle $v \in T_p M$ und somit

$$\nabla f(p) \in (T_p M)^\perp = ((\nabla g(p))^\perp)^\perp = \mathbb{R} \nabla g(p),$$

also $\nabla f(p) = \lambda \, \nabla g(p)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Wir erwähnen ohne Beweis, dass sich auch Extrema unter *mehreren* Nebenbedingungen diskutieren lassen (was in der Vorlesung aus Zeitgründen übersprungen werden musste und daher nicht prüfungsrelevant ist):

Satz 26.6 *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $n \in \mathbb{N}$. Weitere seien $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $g = (g_1, \ldots, g_k) \colon U \to \mathbb{R}^k$ eine C^1-Funktion derart, dass die k Vektoren*

$$\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)$$

linear unabhängig sind für alle $p \in M := g^{-1}(\{0\})$, also die Matrix $J_g(p) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ den Rang k hat. Ist $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $p \in M$ eine lokale Minimalstelle von $f|_M$, so existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(p). \tag{146}$$

Der Beweis ist analog zu demjenigen von Satz 26.1: man definiert zunächst T_pM wie oben und zeigt mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass

$$T_pM = \ker g'(p) = \{\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)\}^\perp.$$

Anschließend zeigt man analog zum Obigen, dass

$$\nabla f(p) \in (T_pM)^\perp = (\{\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)\}^\perp)^\perp = \operatorname{span}\{\nabla g_1(p), \ldots, \nabla g_k(p)\},$$

so dass also (146) gilt.

27 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Zeitabhängige Größen lassen sich oft durch Differentialgleichungen beschreiben. Diese werden in Natur- und Ingenieurswissenschaften ständig benutzt. Auch innermathematisch (etwa in Analysis, Differentialgeometrie und der Theorie dynamischer Systeme) spielen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle.

Grundbegriffe und erste Beispiele

Beispiel 27.1 (Ein Populationsmodell/Exponentielles Wachstum).
Wir betrachten eine Population von Bakterien in einer Petrischale. Zu einer festen Zeit t_0 (zu der wir die Beobachtung beginnen) gebe es $N(t_0) = N_0 > 0$ Bakterien. Wie groß ist die Zahl $N(t)$ der Bakterien zu einer beliebigen Zeit t? Wir modellieren das Problem wie folgt: Da $N(t)$ sehr groß ist und gezeichnet von einer Kurve nicht zu unterscheiden wäre, machen wir die vereinfachende Annahme, dass $N(t)$ eine stetig differenzierbare Funktion von t ist. Wir machen weiter die Annahme, dass die Änderungsrate/Ableitung $N'(t)$ zur Zeit t proportional zu $N(t)$ ist (liegen z.B. doppelt so viele Bakterien vor, erwarten wir die doppelte Zuwachsrate).[35] Mit einer reellen Konstanten $\alpha > 0$ ist also

$$N'(t) = \alpha N(t). \tag{147}$$

Um die Gleichung zu lösen, teilen wir duch $N(t) > 0$ und erhalten

$$\alpha = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{d}{dt}(\ln(N(t)).$$

Integrieren beider Seiten von t_0 bis t liefert

$$\alpha(t - t_0) = \ln(N(t)) - \ln(N(t_0)) = \ln\frac{N(t)}{N_0}.$$

Wir wenden die Exponentialfunktion auf beide Seiten an und lösen nach $N(t)$ auf, mit dem Ergebnis

$$N(t) \;=\; N_0\, e^{\alpha(t-t_0)}. \tag{148}$$

[35]Dies ist vernünftig, so lange die Polulation nicht zu groß ist, so dass ausreichend Nährstoffe und Platz zur Verfügung stehen.

Dann ist $N(t_0) = N_0 e^0 = N_0$ und in der Tat (unter Benutzung der Kettenregel)

$$N'(t) = \alpha N_0 e^{\alpha(t-t_0)} = \alpha N(t).$$

Die durch (148) gegebene Funktion $N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ löst also die Gleichung (147) unter der Anfangsbedingung $N(t_0) = N_0$ und ist die einzige solche (stets positive) Funktion (da wir in jedem Schritt des Rechenwegs nur Schlussfolgerungen gezogen haben). Nach (148) zeigt die Bakterienpopulation exponentielles Wachstum. Da $N(t) \to \infty$ für $t \to \infty$, ist die Lösung für große t übrigens nicht realistisch und unsere Modellierung war zu schlecht (in eine Petrischale passen nicht beliebig viele Bakterien).

Im vorigen Beispiel haben wir eine Differentialgleichung gelöst (genauer: ein Anfangswertproblem). Die Begriffe sind wie folgt:

Definition 27.2 Eine *Differentialgleichung* (erster Ordnung) in $\mathbb{R}^n$ ist eine Gleichung der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{149}$$

(oder kurz: $y' = f(t, y)$) mit einer gegebenen Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eine *Lösung der Differentialgleichung* (149) ist eine C^1-Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{R}^n$ auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass

$$(t, \phi(t)) \in U \quad \text{für alle } t \in I$$

und

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Definition 27.3 Gegeben f wie zuvor und $(t_0, y_0) \in U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nennt man eine Lösung $\phi\colon I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung (149) eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

wenn zudem $t_0 \in I$ und $\phi(t_0) = y_0$ gilt.

Bemerkung 27.4 (a) Wir betrachten ausschließlich *explizite* Differentialgleichungen der Form (149), nicht implizite Differentialgleichungen der Form

$$0 = f(t, y(t), y'(t)).$$

(b) In der Literatur spricht man oft lediglich im Falle $n = 1$ von Differentialgleichungen, im Falle $n \geq 2$ von *Systemen* von Differentialgleichungen.

(c) Später betrachten wir auch Differentialgleichungen höherer Ordnung, der Form

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)).$$

(d) Die von uns betrachteten Differentialgleichungen sind *gewöhnliche* Differentialgleichungen, wir suchen also Lösungen $t \mapsto \phi(t)$, die Funktionen einer reellen Variablen sind. Sucht man hingegen Funktionen ϕ mehrerer Variablen und stellt Gleichungen unter Benutzung partieller Ableitungen auf, so spricht man von einer *partiellen Differentialgleichung*; solche Gleichungen sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung. Ein Beispiel ist die Laplace-Gleichung

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},$$

deren Lösungen sogenannte *harmonische Funktionen* $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ sind.

(e) Wir kürzen "Differentialgleichung" mitunter als "DGL" ab und "Anfangswertproblem" als "AWP." Im Englischen kürzt man "ordinary differential equation" als "ODE" ab, "partial differential equation" als "PDE".

27.5 (Fortsetzung von Beispiel 27.1).
In Beispiel 27.1 haben wir also das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= N_0 \end{cases}$$

gelöst mit der durch $f(t, y) = \alpha y$ gegebenen Funktion $f \colon \mathbb{R} \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$.

Beispiel 27.6 (Radioaktiver Zerfall). Wir betrachten eine Probe einer radioaktiv zerfallenden Substanz. Die Anzahl der Atome der Substanz zur Zeit t sei $N(t) > 0$ (wobei wir wieder näherungsweise N als stetig dfferenzierbare Funktion annehmen) und zu einer Anfangszeit t_0 liegen N_0 Atome vor. Modellierung: Wir nehmen an, dass $N'(t)$ proportional zu $N(t)$ ist, mit einer negativen reellen Proportonalitätskonstanten $-k$ (mit $k > 0$). Zu lösen haben wir also das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} N'(t) &= -kN(t), \\ N(t_0) &= N_0. \end{cases}$$

Der gleiche Rechenweg wie in Beispiel 27.1 zeigt, dass es auf $\mathbb{R}$ genau eine überall positive Lösung gibt,

$$N(t) \;=\; N_0\, e^{-k(t-t_0)}.$$

Die Zahl der Atome nimmt also exponentiell ab.

Wir betrachten nun verschiedene Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, für welche elementare Lösungsmethoden bekannt sind. Dies sind zum einen homogene sowie inhomogene lineare Differentialgleichungen für skalarwertige (und schließlich auch für vektorwertige) Funktionen. Zum anderen betrachten wir sogenannte Differentialgleichungen mit getrennten Variablen, von der Form $y'(t) = g(t)h(y(t))$.

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition 27.7 Eine *lineare Differentialgleichung* erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall ist und $a\colon J \to \mathbb{R}$ sowie $b\colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Ist $b(t) = 0$ für alle $t \in J$, die DGL also von der Form

$$y'(t) = a(t)y(t),$$

so spricht man von einer *homogenen* linearen Differentialgleichung erster Ordnung; andernfalls heißt die lineare Differentialgleichung *inhomogen.* Ist a eine konstante Funktion, also einfach

$$y'(t) = a\, y(t) + b(t),$$

so spricht man von einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung *mit konstanten Koeffizienten.*

Satz 27.8 (Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.) *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $a\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

(a) (Globale Existenz von Lösungen). *Für jedes* $t_0 \in J$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}$ *ist* $\phi\colon J \to \mathbb{R}$,

$$t \mapsto y_0\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \tag{150}$$

eine auf ganz J *definierte Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} y'(t) &= a(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

(b) (Eindeutigkeit von Lösungen). *Ist* $I \subseteq J$ *ein nicht entartetes Intervall mit* $t_0 \in I$ *und auch* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ *eine Lösung des Anfangswertproblems aus* (a)*, so gilt* $\gamma = \phi|_I$.

Beweis. (a): Es ist $\phi(t_0) = y_0\, e^0 = y_0$ und Ableiten mit der Kettenregel zeigt, dass

$$\phi'(t) = y_0\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t a(s)\,ds = y_0\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} a(t) = a(t)\,\phi(t).$$

Also löst ϕ die Differentialgleichung und auch das Anfangswertproblem.

(b): Nach (a) ist

$$\psi\colon J \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}$$

eine Lösung der DGL (mit $\psi(t_0) = 1$); weiter ist $\phi = y_0\,\psi$. Beachten Sie, dass $\psi(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Wir können also die Funktion

$$h\colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\gamma(t)}{\psi(t)}$$

betrachten. Wir leiten mit der Quotientenregel ab; da γ und ψ Lösungen der Differentialgleichung sind, ergibt sich für jedes $t \in I$

$$h'(t) = \frac{\psi(t)\gamma'(t) - \gamma(t)\psi'(t)}{\psi(t)^2} = \frac{a(t)\psi(t)\gamma(t) - a(t)\gamma(t)\psi(t)}{\psi(t)^2} = 0.$$

Die Funktion h ist also konstant, mit dem konstanten Funktionswert

$$h(t_0) = \frac{\gamma(t_0)}{\psi(t_0)} = \frac{y_0}{1} = y_0.$$

Also ist $\frac{\gamma(t)}{\psi(t)} = y_0$ und somit $\gamma(t) = y_0\,\psi(t) = \phi(t)$. □

Beispiel 27.1 und Beispiel 27.6 waren bereits Beispiele für homogene lineare Differentialgleichungen, mit konstanten Koeffizienten. Schauen wir uns ein Beispiel an, bei dem nicht konstante Koeffizienten vorliegen.

Beispiel 27.9 Finden Sie die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung ϕ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &=& t\,y(t) \\ y(0) &=& 5. \end{cases}$$

Lösung: Nach Satz 27.8 (a) ist

$$\phi(t) = y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

mit $t_0 = 0$, $y_0 = 5$ und $a(s) = s$, also

$$\phi(t) = 5\, e^{\int_0^t s\,ds} = 5\, e^{t^2/2}.$$

Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Satz 27.10 (Inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung.) *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $a\colon J \to \mathbb{R}$ sowie $b\colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt:*

(a) (Globale Existenz von Lösungen). *Für jedes $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist die auf ganz J definierte Funktion $\phi\colon J \to \mathbb{R}$,*

$$\phi(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds}\, d\tau \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &=& a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) &=& y_0. \end{cases} \tag{151}$$

(b) (Eindeutigkeit von Lösungen). *Ist $I \subseteq J$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I$ und auch $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus* (a)*, so gilt $\gamma = \phi|_I$.*

Beweis. (a): Wir suchen eine Lösung der Form

$$\phi(t) = c(t)\eta(t),$$

wobei $\eta(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$ eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung $y'(t) = a(t)y(t)$ ist (diesen Ansatz nennt man auch "Variation der Konstanten.") Dann ist $c(t_0) = y_0$ und

$$\phi'(t) = c'(t)\eta(t) + c(t)\eta'(t) = c'(t)\eta(t) + c(t)a(t)\eta(t). \tag{152}$$

Wir setzen $\phi'(t)$ aus (152) und $\phi(t) = c(t)\eta(t)$ in (151) ein und erhalten die Bedingung

$$c'(t)\eta(t) + c(t)a(t)\eta(t) = a(t)c(t)\eta(t) + b(t),$$

also

$$c'(t)\eta(t) = b(t),$$

also

$$c'(t) = b(t)\eta(t)^{-1} = b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \quad \text{für alle } t \in J.$$

Äquivalent hierzu ist

$$c(t) = y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-\int_{t_0}^\tau a(s)\,ds} \quad \text{für alle } t \in J,$$

was den Beweis für (a) beendet.

(b): Wir betrachten $h\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \gamma(t) - \phi(t)$. Dann ist $h(t_0) = y_0 - y_0 = 0$. Weiter gilt

$$h'(t) = \gamma'(t) - \phi'(t) = a(t)\,\gamma(t) + b(t) - (a(t)\phi(t) + b(t)) = a(t)\,(\gamma(t) - \phi(t)) = a(t)\,h(t).$$

Es ist h also die nach 27.8 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= a(t)\,y(t) \\ y(t_0) &= 0 \end{cases}$$

und diese ist nach 27.8 $h = 0$. Also ist $\gamma = \phi|_I$. $\square$

Bemerkung 27.11 (a) In der Situation von Satz 27.10 sind die auf J definierten Lösungen der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung $y'(t) = a(t)y(t)$ von der Form

$$c\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ (dem Anfangswert y_0 zur Zeit t_0). Beim Ansatz der "Variation der Konstanten" wird die Konstante c durch eine Funktion $c(t)$ ersetzt.

(b) Es dürfte vielen leichter fallen, sich den Ansatz der Variation der Konstanten zu merken und anzuwenden als die fertige Endformel aus 27.10 (die sich aus dem Ansatz jederzeit wieder herleiten lässt).

Beispiel 27.12 (Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Wir betrachten den Spezialfall einer linearen Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a\,y(t) + b(t),$$

wobei $b\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ ist und $a \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl. Gegeben $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist die auf J definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= & a\,y(t) + b(t) \\ y(t_0) &= & y_0 \end{cases}$$

dann die Funktion $\gamma\colon J \to \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-(\tau - t_0)a}\, d\tau \right) e^{(t-t_0)a}.$$

Dies können wir (wenn gewünscht) noch umformen zu

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)a} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)a} b(\tau)\, d\tau. \tag{153}$$

Differentialgleichungen in getrennten Veränderlichen

27.13 Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ und $K \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $h\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass $h(y) > 0$ für alle $y \in K$ oder $h(y) < 0$ für alle $y \in K$. Gegeben $t_0 \in J$ und $y_0 \in K$ wollen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= & g(t)\,h(y(t)) \\ y(t_0) &= & y_0 \end{cases}$$

lösen.

27.14 Kochrezept. Man schreibe

$$\frac{dy}{dt} = g(t)\,h(y),$$

gehe formal zu

$$\frac{dy}{h(y)} \;=\; g(t)\,dt$$

über und integriere beide Seiten:

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(x)}\,dx \;=\; \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$

Man berechne die Integrale und löse nach $y(t)$ auf.

Details und eine mathematische Begründung werden sogleich gegeben, in Satz 27.16 (der in der Vorlesung übersprungen wurde). Unter der oben gemachten Voraussetzung, dass $h(y)$ stets positiv oder stets negativ ist, sind die Lösungen des Anfangswertproblems übrigens wieder eindeutig.

Beispiel 27.15 *Lösen Sie das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= t\,y(t)^2 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Lösung. Wir schreiben

$$\frac{dy}{dt} \;=\; t\,y^2$$

und stellen formal um zu

$$\frac{dy}{y^2} \;=\; t\,dt.$$

Wir integrieren beide Seiten,

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{t_0}^{t} s\,ds,$$

also mit $t_0 = 0$, $y_0 = 1$

$$\int_{1}^{y(t)} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{0}^{t} s\,ds.$$

Ausrechnen der Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen liefert

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{y(t)} = [s^2/2]_0^t,$$

also

$$1 - \frac{1}{y(t)} = t^2/2.$$

Auflösen nach $y(t)$ ergibt

$$y(t) = \frac{1}{1 - t^2/2}.$$

Satz 27.16 (Differentialgleichungen in getrennten Veränderlichen.) *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ und $K \subseteq \mathbb{R}$ nicht entartete Intervalle, $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $h\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass $h(y) > 0$ für alle $y \in K$ oder $h(y) < 0$ für alle $y \in K$. Gegeben $t_0 \in I$ und $y_0 \in K$ definieren wir C^1-Funktionen*

$$G\colon J \to \mathbb{R}, \quad G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

und

$$H\colon K \to \mathbb{R}, \quad H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(x)}\, dx.$$

Dann ist H eine streng monotone Funktion, $H(K)$ ein nicht entartetes Intervall und $H\colon K \to H(K)$ ein C^1-Diffeomorphismus. Weiter gilt:

(a) *Auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq J$ mit $t_0 \in I$ gibt es genau dann eine Lösung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} y' &= g(t)h(y) \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

wenn $G(I) \subseteq H(K)$. Die Lösung ist dann eindeutig und gegeben durch $\gamma(t) = H^{-1}(G(t))$ für alle $t \in I$.

(b) *Ist $K \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so existiert ein in J offenes Intervall $I \subseteq J$ mit $t_0 \in I$ und eine Lösung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems aus* (a).

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz ist $h(K)$ ein Intervall. Ist $h(y) > 0$ für alle $y \in K$, so ist wegen $H' = 1/h$ die C^1-Funktion H streng monoton wachsend; im Fall $h(K) \subseteq]-\infty, 0[$ ist H streng fallend. Zudem wissen wir aus der Mathematik 1, dass H^{-1} stetig differenzierbar ist mit

$$(H^{-1})'(H(y)) = \frac{1}{H'(y)} \quad \text{für alle } y \in K. \tag{154}$$

(a) Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems, so ist $I \subseteq J$ und $\gamma(t) \in K$ für alle $t \in I$. Für alle $t \in I$ gilt weiter

$$\gamma'(t) = g(t)h(\gamma(t)),$$

also
$$\frac{\gamma'(t)}{h(\gamma(t))} = g(t). \tag{155}$$

Da $(H \circ \gamma)'(t) = H'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{h(\gamma(t))}$, ist $H \circ \gamma$ eine Stammfunktion der linken Seite von (155). Integration von t_0 bis t ergibt

$$[H \circ \gamma]_{t_0}^t = [G]_{t_0}^t,$$

also
$$H(\gamma(t)) = G(t)$$

(wobei $H(y_0) = G(t_0) = 0$ benutzt wurde). Insbesondere ist $G(t) = H(\gamma(t)) \in H(K)$ für alle $t \in I$, also $G(I) \subseteq H(K)$ und die Lösung γ erfüllt $\gamma(t) = H^{-1}(G(t))$ für alle $t \in I$.

Ist umgekehrt $I \subseteq J$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I$ und $G(I) \subseteq H(K)$, so ist
$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto H^{-1}(G(t))$$
eine C^1-Funktion mit $\gamma(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = y_0$. Wegen (154) ist

$$\gamma'(t) = (H^{-1})'(G(t))G'(t) = (H^{-1})'(H(\gamma(t)))G'(t) = \frac{1}{H'(\gamma(t))}g(t) = h(\gamma(t))g(t)$$

und somit γ eine Lösung des Anfangswertproblems aus (a).

(b) Ist K offen in $\mathbb{R}$, so auch $H(K)$. Also ist $H(K)$ eine offene 0-Umgebung in $\mathbb{R}$. Da $G\colon J \to \mathbb{R}$ stetig ist und $G(t_0) = 0$, ist $G^{-1}(H(K))$ eine Umgebung von t_0 in J und enthält als solche ein in J offenes Intervall I mit $t_0 \in I$. □

Lineare DGLn in $\mathbb{R}^n$ mit konstanten Koeffizienten

Über Definition 27.7 hinaus betrachten wir nun auch lineare Differentialgleichungen für vektorwertige Funktionen.

Definition 27.17 Eine *lineare Differentialgleichung* erster Ordnung in $\mathbb{R}^n$ ist eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \tag{156}$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall ist, $A\colon J \to \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ eine stetige matrixwertige Funktion und $b\colon J \to \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion.[36] Ist $b(t) = 0$ für alle $t \in J$, die DGL also von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t),$$

so spricht man von einer *homogenen* linearen Differentialgleichung erster Ordnung; andernfalls heißt die lineare Differentialgleichung *inhomogen*. Ist $A(t)$ eine konstante Funktion in t, also eine feste Matrix A, so nennt man (156) eine lineare Differentialgleichung *mit konstanten Koeffizienten*.

Betrachtet wird also die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

in $\mathbb{R}^n$ mit $f\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto A(t)y + b(t)$.

Ist $n > 1$, werden solche Differentialgleichungen traditionell auch *Differentialgleichungssysteme* genannt. In diesem Kapitel beschränken wir uns auf den Fall von linearen Differentialgleichungssystemen *mit konstanten Koeffizienten*. Ein entscheidendes Hilfsmittel für uns ist die bereits in früheren Kapiteln definierte Matrixexponentialfunktion.

Satz 27.18 (Homogene lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten). *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt folgendes:*

(a) (Globale Existenz von Lösungen). *Die Funktion*

$$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A}y_0$$

ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= A\,y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

(b) (Eindeutigkeit). *Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in J$ und auch $\gamma\colon J \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus* (a)*, so gilt $\gamma = \phi|_J$.*

[36] Es ist also $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ mit stetigen Funktionen $a_{ij}\colon J \to \mathbb{R}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mit stetigen Funktionen $b_1, \ldots, b_n\colon J \to \mathbb{R}$.

Zum Nachweis benutzen wir folgende Tatsache.

Lemma 27.19 (Produktregel für Matrix mal Vektor.) *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $J \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \mapsto A(t)$ eine stetig differenzierbare Matrix-wertige Funktion und $J \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ eine stetig differenzierbare vektorwertige Funktion. Dann ist die vektorwertige Funktion*

$$J \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto A(t)v(t)$$

stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dt}\,(A(t)v(t)) = A'(t)v(t) + A(t)v'(t).$$

Beweis. Sei $A(t) = (a_{ij}(t))$. Die $i$te Komponente des Vektors $A(t)v(t) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)v_j(t).$$

Mit der Produktregel erhalten wir die Ableitung

$$\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij}(t)v_j(t) + a_{ij}(t)v'_j(t)) = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(t)v_j(t) \; + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)v'_j(t).$$

Diese stimmt mit der $i$ten Komponente von $A'(t)v(t) + A(t)v'(t)$ überein. □

Beweis von 27.18 (a): Nach Satz 15.17 und 27.19 ist

$$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A}\, y_0$$

stetig differenzierbar mit

$$\phi'(t) = A\, e^{(t-t_0)A} y_0 = A\,\phi(t).$$

Da zudem $\phi(t_0) = e^{\mathbf{0}}y_0 = \mathbf{1}_n\, y_0 = y_0$, ist ϕ eine Lösung des vorgelegten Anfangswertproblems.

(b) Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{-(t-t_0)A}\,\gamma(t),$$

welche nach 27.19 stetig differenzierbar ist mit

$$h'(t) = -e^{-(t-t_0)A} \underbrace{A\gamma(t)}_{=\gamma'(t)} + e^{-(t-t_0)A}\,\gamma'(t) = 0$$

für alle $t \in J$. Also ist h konstant mit Funktionswert

$$h(t_0) = e^{\mathbf{0}}\,\gamma(t_0) = \gamma(t_0) = y_0.$$

Da $e^{-(t-t_0)A} = (e^{(t-t_0)A})^{-1}$, liefert Multiplikation von $h(t) = y_0$ von links mit $e^{(t-t_0)A}$

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)A}\,y_0,$$

was den Beweis beendet. $\square$

Die Methode der "Variation der Konstanten" funktioniert in geeigneter Form auch für Systeme linearer Differentialgleichungen.

Satz 27.20 (Inhomogene lineare Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten). *Es seien A eine $n \times n$-Matrix, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall, $b\colon J \to \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion und $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) (Globale Existenz von Lösungen). *Die auf ganz J definierte Funktion $\phi\colon J \to \mathbb{R}^n$,*

$$\phi(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds \tag{157}$$

ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) &= \; A\,y(t) + b(t), \\ y(t_0) &= \; y_0. \end{cases}$$

(b) (Eindeutigkeit). *Ist $I \subseteq J$ ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I$ und auch $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus* (a)*, so ist $\gamma = \phi|_I$.*

Beweis. Für die Lösung $\phi\colon J \to \mathbb{R}^n$ des obigen Anfangswertproblems machen wir den Ansatz

$$\phi(t) = e^{(t-t_0)A}\,c(t)$$

mit einer C^1-Funktion $c\colon J \to \mathbb{R}^n$ (und werden sehen, dass dies funktioniert!). Die Anfangsbedingung ist äquivalent zu

$$y_0 = \phi(t_0) = c(t_0).$$

Nun ist

$$\phi'(t) = \left(\frac{d}{dt}e^{(t-t_0)A}\right) c(t) + e^{(t-t_0)A}\, c'(t) = Ae^{(t-t_0)A}\, c(t) + e^{(t-t_0)A}\, c'(t).$$

Einsetzen in die inhomogene DGL führt auf die äquivalente Bedingung

$$A\, e^{(t-t_0)A}\, c(t) + e^{(t-t_0)A}\, c'(t) = A\, e^{(t-t_0)A}\, c(t) + b(t),$$

also

$$e^{(t-t_0)A}\, c'(t) = b(t),$$

also

$$c'(t) = e^{(t_0-t)A}\, b(t).$$

Für die Stammfunktion erfordert dies

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)A}\, b(s)\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)A}\, b(s)\, ds.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= e^{(t-t_0)A}\, c(t) = e^{(t-t_0)A}\, y_0 + e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)A}\underline{\ }(s)\, ds \\
&= e^{(t-t_0)A}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{e^{(t-t_0)A} e^{(t_0-s)A}}_{e^{(t-t_0+t_0-s)A} = e^{(t-s)A}}\, b(s)\, ds
\end{aligned}$$

von der behaupteten Form.

(b) Die C^1-Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) - \phi(t)$ erfüllt

$$h'(t) = \gamma'(t) - \phi'(t) = A\,\gamma(t) + b(t) - (A\,\phi(t) + b(t)) = A\,(\gamma(t) - \phi(t)) = A\,h(t),$$

da ϕ und γ Lösungen der inhomogenen DGL $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ sind. Da $h(t_0) = y_0 - y_0 = 0$, ist h also eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& A\,y(t) \\ y(t_0) &=& 0. \end{array} \right.$$

Nach 27.18 ist $h = 0$, also $\gamma = \phi|_I$. $\square$

Lösungsmengen linearer Differentialgleichungen

Satz 27.21 *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei L_h die Menge aller auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Lösungen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems*

$$y'(t) = A\,y(t)$$

erster Ordnung. Dann gilt:

(a) *L_h ist ein n-dimensionaler Unterverktorraum des Vektorraums alle Funktionen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.*

(b) *Gegeben $t_0 \in \mathbb{R}$ bilden Lösungen $\phi_1, \dots, \phi_n \in L_h$ genau dann eine Basis für L_h (ein sogenanntes* Lösungsfundamentalsystem*), wenn die Vektoren $\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, also die sogenannte Wronski-Determinante*

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(t_0) := \det\left(\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)\right)$$

mit den Spaltenvektoren $\phi_1(t_0), \dots, \phi_n(t_0)$ von Null verschieden ist.

Beweis. Die Abbildung

$$\varepsilon_{t_0}\colon L_h \to \mathbb{R}^n, \quad \phi \mapsto \phi(t_0)$$

ist linear, da $(\phi + \psi)(t_0) = \phi(t_0) + \psi(t_0)$ per Definition der Summe zweier Funktionen $\phi, \psi \in L_h$ und ebenso $(r\phi)(t_0) = r\phi(t_0)$ für $r \in \mathbb{R}$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit von ϕ im Anfangswertproblem aus 27.18 ist ε_{t_0} surjektiv und injektiv, also bijektiv. Somit ist $\varepsilon_{t_0}\colon L_h \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus von Vektorräumen, folglich $\dim(L_h) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Weiter bilden $\phi_1, \dots, \phi_n \in L_h$ genau dann eine Basis von L_h, wenn $\varepsilon_{t_0}(\phi_1), \dots, \varepsilon_{t_0}(\phi_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden. $\square$

Für ein nicht entartetes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ gilt Analoges für die Menge L_h aller Lösungen auf J und $t_0 \in J$, mit dem gleichen Beweis.

Seien $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, …, $e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ die Standard-Basisvektoren für $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 27.22 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liefern die Spalten*

$$\phi_j(t) = e^{tA} e_j$$

von e^{tA} ein Lösungsfundamentalsystem $\phi_1, \dots, \phi_n$ für $y'(t) = Ay(t)$.

Nach 27.18 ist nämlich ϕ_j Lösung der DGL (zum Anfangswertproblem mit $y_0 = e_j$). Weiter bilden die Vektoren $\phi_j(0) = e_j$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Satz 27.23 *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $b\colon J \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei L_h die Menge der Lösungen $\phi\colon J \to \mathbb{R}^n$ des homogenen linearen Differentialgleichungssystems*

$$y'(t) = A\,y(t)$$

und L_i die Menge aller Lösungen des inhomogenen DGL-Systems $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$. Dann ist $L_i \neq \emptyset$. Für jedes $\phi_p \in L_i$ gilt

$$L_i = \phi_p + L_h := \{\phi_p + \phi\colon \phi \in L_h\}.$$

Beweis. Nach Satz 27.20 ist L_i nicht leer. Für $\phi \in L_h$ ist $(\phi_p + \phi)'(t) = \phi_p'(t) + \phi'(t) = A\phi_p(t) + b(t) + A\phi(t) = A(\phi_p(t) + \phi(t)) + b(t)$, also $\phi_p + \phi \in L_i$. Ist $\psi \in L_i$, so ist $(\psi - \phi_p)')t) = A\psi(t) + b(t) - (A\phi_p(t) + b(t)) = A(\psi(t) - \phi_p(t))$, also $\psi - \phi_p \in L_h$ und $\psi = \phi_p + (\psi - \phi_p) \in \phi_p + L_h$. □

Traditionell nennt man ein gegebenes $\phi_p \in L_i$ eine "partikuläre Lösung" und kann den vorigen Satz dann wie folgt formulieren:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL ist die Summe einer partikulären Lösung der imhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

28 Lokale Existenz und lokale Eindeutigkeit von Lösungen

Bisher haben wir vor allem lineare Differentialgleichungen betrachtet (mit Ausnahme von Differentialgleichungen in getrennten Veränderlichen). Viele in der Praxis wichtige Differentialgleichungen sind jedoch nicht linear. In diesem Kapitel stellen wir einige Grundtatsachen über allgemeine (nicht notwendig lineare) Differentialgleichungen bereit. Für solche Differentialgleichungen ist es oft nicht möglich, Lösungen explizit in Formeln anzugeben.[37] Sie existieren jedoch unter geeigneten Bedingungen und können am Computer wenigstens näherungsweise iterativ berechnet werden.

Lokale Eindeutigkeit

Definition 28.1 Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir sagen, die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{158}$$

erfüllt *lokale Eindeutigkeit von Lösungen*, wenn gilt: Sind $\phi_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\phi_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von (158) und ist $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gilt $\phi_1|_W = \phi_2|_W$ für eine t_0-Umgebung W in $I_1 \cap I_2$.

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ für alle $t \in I_1 \cap I_2$ derart, dass $|t - t_0| < \varepsilon$.

Definition 28.2 Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|\cdot\|$.

(a) Gibt es ein $L \in [0, \infty[$ derart, dass

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_2 - y_1\| \quad \text{für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in U,$$

so sagt man, f erfüllt eine *Lipschitzbedingung*.[38] Man nennt dann L eine Lipschitzkonstante.

(b) Hat jedes $(t, y) \in U$ eine Umgebung $V \subseteq U$ derart, dass $f|_V$ eine Lipschitzbedingung erfüllt, so sagt man, f erfüllt eine *lokale Lipschitzbedingung.*

[37] Ebenso für lineare Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten.

[38] Man spricht auch von einer *globalen* Lipschitzbedingung.

Bemerkung 28.3 (a) Aus der globalen Lipschitzbedingung folgt die lokale Lipschitzbedingung (man nehme $V := U$).

(b) Es ist egal, welche Norm auf $\mathbb{R}^n$ benutzt wird, da alle Normen äquivalent sind (der Wert der Lipschitzkonstanten kann sich allerdings ändern beim Wechsel der Norm, im Falle einer globalen Lipschitzbedingung).

(c) Ist f wie oben Lipschitzstetig, so erfüllt f eine Lipschitzbedingung; die umgekehrte Implikation gilt nicht. (Beachten Sie, dass wir im Falle der Lipschitzbedingung $\|f(t_2, y_2) - f(t_1, y_1)\|$ nur abschätzen, wenn $t_1 = t_2$).

Satz 28.4 (Eindeutigkeitssatz) *Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung, so erfüllt die Differentialgleichung*

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

lokale Eindeutigkeit von Lösungen.

Beweis. Seien $\phi_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\phi_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung und $t_0 \in I_1 \cap I_2$ derart, dass $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$. Wir haben eine t_0-Umgebung $W \subseteq I_1 \cap I_2$ zu finden mit $\gamma_1|_W = \gamma_2|_W$.

1. Fall. Ist $I_1 \cap I_2 = \{t_0\}$, so nehmen wir $W := \{t_0\}$.

2. Fall: Sei $I_1 \cap I_2$ ein nicht entartetes Intervall. Wir wählen eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Da f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt, gibt es eine Umgebung V von $(t_0, \phi(t_0))$ in U derart, dass $f|_V$ eine Lipschitzbedingung erfüllt. Sei L eine Lipschitzkonstante. Es sei W ein in $I_1 \cap I_2$ enthaltenes, in $\mathbb{R}$ abgeschlossenes und beschränktes Intervall, das eine t_0-Umgebung in $I_1 \cap I_2$ ist. Da $W \to U$, $t \mapsto (t, \phi_j(t))$ für $j \in \{1, 2\}$ stetig ist, können wir nach Verkleinern von W annehmen, dass

$$(t, \phi_j(t)) \in V \quad \text{für } j \in \{1, 2\} \text{ und alle } t \in W.$$

Sei ℓ die Länge des Intervalls W; nach Verkleinern von W dürfen wir annehmen, dass

$$\ell L < 1.$$

Wir betrachten nun die C^1-Funktion

$$\psi\colon W \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \phi_2(t) - \phi_1(t).$$

Da

$$\psi(t_0) = \phi_2(t_0) - \phi_1(t_0) = 0,$$

ist $\psi(t) = \psi(t) - \psi(t_0)$ für alle $t \in W$ und somit nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \psi'(s)\, ds \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \phi_2'(s) - \phi_1'(s)\, ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_2(s)) - f(s, \phi_1(s))\, ds \right\| \\
&\leq |t - t_0| \sup_{s \in W} \underbrace{\|f(s, \phi_2(s)) - f(s, \phi_1(s))\|}_{\leq L\|\phi_2(s) - \phi_1(s)\|} \\
&\leq \ell L \sup\{\|\phi_2(s) - \phi_1(s)\| \colon s \in W\} = \ell L \|\psi\|_\infty
\end{aligned}$$

unter Benutzung der Supremumsnorm

$$\|\psi\|_\infty := \sup\{\|\psi(s)\| \colon s \in W\}$$

von ψ. Bildung des Supremums über alle $t \in W$ liefert

$$\|\psi\|_\infty \leq \ell L \|\psi\|_\infty.$$

Da $\ell L < 1$, folgt $\|\psi\|_\infty = 0$. Also ist $\psi = 0$ und somit $\phi_1|_W = \phi_2|_W$. □

Satz 28.5 *Es sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$f \colon J \times Y \to \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto f(t, y)$$

eine Funktion derart, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y)$$

für alle $t \in J$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y$ existieren und stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen von $(t, y) \in J \times Y$ sind. Dann erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung.

Beweis. Sei $t_0 \in J$, $y_0 \in Y$. Wir versehen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Maximumnorm. Für $t \in J$ betrachten wir die Funktion

$$f_t := f(t, \cdot) \colon Y \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto f(t, y),$$

die durch Festhalten der ersten Variablen entsteht. Dann existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partiellen Ableitung

$$\frac{\partial f_t}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y)$$

und ist eine stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion von $y \in U$. Also ist f_t stetig differenzierbar. Bezeichnet $J_{f_t}(y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Jacobimatrix von f_t an der Stelle y, so ist die Abbildung

$$J \times Y \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (t, y) \mapsto J_{f_t}(y) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, y\Big)_{i,j=1,\ldots n}$$

stetig, wobei $f = (f_1, \ldots, f_n)$ in Komponenten. Also ist auch die Abbildung

$$h \colon J \times Y \to [0, \infty[, \quad (t, y) \mapsto \|J_{f_t}(y)\|_{\mathrm{op}}$$

stetig (wobei wir die Operatornorm bilden). Folglich existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$h(t, y) \leq h(t_0, y_0) + 1$$

für alle (t, y) in der offenen Teilmenge

$$V := \{(t, y) \in J \times Y \colon |t - t_0| < \delta \text{ und } \|y - y_0\|_\infty < \delta\}$$

von $J \times Y$. Unter Benutzung der Kugeln $I := \{t \in J \colon |t - t_0| < \delta\}$ und $B_\delta(y_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$V = I \times B_\delta(y_0).$$

Da die Kugel $B_\delta(y_0)$ konvex ist, können wir den Mittelwertsatz in Integralform anwenden und erhalten für alle (t, y), $(t, z) \in V$

$$\begin{aligned}
\|f(t, z) - f(t, y)\|_\infty &= \|f_t(z) - f_t(y)\|_\infty \\
&= \left\| \int_0^1 J_{f_t}(y + t(z - y))(z - y)\, dt \right\|_\infty \\
&\leq \sup\{\|J_{f_t}(y + t(z - y))\|_{\mathrm{op}} \|z - y\|_\infty \colon t \in [0, 1]\} \\
&\leq L\, \|z - y\|_\infty
\end{aligned}$$

mit $L := h(t_0, y_0) + 1$. □

Folgerung 28.6 bis Satz 28.7 haben wir in der Vorlesung übersprungen; sie sind nicht prüfungsrelevant.

Folgerung 28.6 *Ist $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung.*

Beweis. Sei $(t_0, y_0) \in U$ mit $y_0 = (y_1, \ldots, y_n)$. Da U offen ist, existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$J \times Y \subseteq U$$

mit $J :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ und

$$Y :=]y_1 - \delta, y_1 + \delta[\times \cdots \times]y_n - \delta, y_n + \delta[.$$

Nach Satz 28.5 existiert eine offene (t_0, y_0)-Umgebung $V \subseteq J \times Y$ derart, dass $(f|_{J\times Y})|_V = f|_V$ eine Lipschitzbedingung erfüllt. Da $J \times Y$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen ist, ist auch V in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und somit eine Umgebung von (t_0, y_0) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. □

Wie in Definition 27.17 betrachten wir nun eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung in $\mathbb{R}^n$ von der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall ist, $A\colon J \to \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ eine stetige matrixwertige Funktion und $b\colon J \to \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion.

Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

in $\mathbb{R}^n$ mit $f\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t, y) \mapsto A(t)y + b(t)$.

Satz 28.7 *Jede lineare Differentialgleichung $y(t) = A(t)y(t) + b(t)$ erfüllt lokale Eindeutigkeit von Lösungen.*

Beweis. Mit Notationen wie zuvor hat die Differentialgleichung die rechte Seite

$$f\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \mapsto A(t)y + b(t).$$

Für $t \in J$ schreiben wir $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$; es ist dann

$$a_{ij}\colon J \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto a_{ij}(t)$$

eine stetige Funktion für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Für festes $t \in J$ ist $f_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto A(t)y + b(t)$ affin-linear. Wir können also partielle Ableitungen nach $y_1, \ldots, y_n$ (mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$) bilden und erhalten für $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(t, y) = A(t)e_j = (a_{1j}(t), \ldots, a_{nj}(t))^T,$$

was eine stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion von $(t, y) \in J \times \mathbb{R}^n$ ist. Nach Satz 28.5 erfüllt f folglich eine lokale Lipschitzbedingung. Nach dem Eindeutigkeitssatz erfüllt die zugehörige Differentialgleichung somit lokale Eindeutigkeit von Lösungen. $\square$

Satz 28.8 *Es sei $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ derart, dass die Differentialgleichung*

$$y' = f(t, y) \tag{159}$$

lokale Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt. Sind $\phi_1 \colon I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\phi_2 \colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung (159) *derart, dass $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I_1 \cap I_2$, so gilt $\phi_1|_{I_1 \cap I_2} = \phi_2|_{I_1 \cap I_2}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\phi_1(T) = \phi_2(T)$ für alle $T \in I_1 \cap I_2$ mit $T > t_0$; analog zeigt man, dass $\phi_1(T) = \phi_2(T)$ für alle $T \in I_1 \cap I_2$ mit $T < t_0$. Sei also $T \in I_1 \cap I_2$ mit $T > t_0$. Sei M die Menge alle $\tau \in \,]t_0, T]$ derart, dass

$$\phi_1|_{[t_0, \tau[} = \phi_2|_{[t_0, \tau[}$$

und somit

$$\phi_1|_{[t_0, \tau]} = \phi_2|_{[t_0, \tau]},$$

da

$$\phi_1(\tau) = \lim_{t \nearrow \tau} \underbrace{\phi_1(t)}_{= \phi_2(t)} = \phi_2(\tau).$$

Da $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ gilt und die DGL lokale Eindeutigkeit von Lösungen erfüllt, ist $M \neq \emptyset$. Für jedes $\tau \in M$ ist offenbar $]t_0, \tau] \subseteq M$. Also ist M ein Intervall. Da $M \subseteq [t_0, T]$, gilt

$$\theta := \sup M \leq T$$

und per Konstruktion ist $]t_0, \theta[\subseteq M$, also $\phi_1|_{[t_0,\theta[} = \phi_2|_{[t_0,\theta[}$ und somit $\theta \in M$. Wäre $\theta < T$, so gäbe es wegen der lokalen Eindeutigkeit ein $\tau \in]\theta, T]$ derart, dass

$$\phi_1|_{[\theta,\tau[} = \phi_2|_{[\theta,\tau[}$$

und also $\phi_1|_{[t_0,\tau[} = \phi_2|_{[t_0,\tau[}$, woraus $\tau \in M$ folgen würde im Widerspruch zur Maximalität von θ. Als muss doch $\theta = T$ sein und somit $\phi_1(T) = \phi_2(T)$. □

Wir halten noch eine Folgerung aus Satz 28.8 fest, die in der Vorlesung übersprungen wurde und nicht prüfungsrelevant ist.

Satz 28.9 *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ derart, dass die Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ lokale Eindeutigkeit der Lösungen erfüllt. Sei $(t_0, y_0) \in U$. Hat das Anfangswertproblem*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \tag{160}$$

eine Lösung, so hat es eine Lösung $\gamma_{\max}\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n$, welche im folgenden Sinne **maximal** *ist: Für jede Lösung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ von* (160) *gilt $I \subseteq I_{\max}$ und $\gamma = \gamma_{\max}|_I$.*

Beweis. Sei Γ die Menge aller Lösungen $\gamma\colon I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (160). Dann ist

$$I_{\max} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$$

ein Intervall. Da $\gamma|_{I_\gamma \cap I_\eta} = \eta|_{I_\gamma \cap I_\eta}$ für alle $\gamma, \eta \in \Gamma$ (nach Satz 2.13), ist

$$\gamma_{\max}\colon I_{\max} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) \quad \text{wenn } \gamma \in \Gamma \text{ und } t \in I_\gamma$$

wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass an jeder Stelle t des Definitionsbereichs $I_{\max}$, an welcher man von rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen sprechen kann, diese für $\gamma_{\max}$ existieren und durch $f(t, \gamma_{\max}(t))$ gegeben sind. Folglich ist die Funktion γ an jeder Stelle $t \in I_{\max}$ differenzierbar (also insbesondere dort stetig) und $\gamma'_{\max}(t) = f(t, \gamma_{\max}(t))$, was eine stetige Funktion von t ist. Somit ist $\gamma_{\max}$ eine C^1-Funktion und eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$. Per Konstruktion gilt $I_\gamma \subseteq I_{\max}$ und $\gamma_{\max}|_{I_\gamma} = \gamma$ für jede Lösung $\gamma\colon I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems (160). Insbesondere ist $\gamma_{\max}(t_0) = \gamma(t_0) = y_0$ und somit $\gamma_{\max}$ eine Lösung von (160).

Diskussion der einseitigen Ableitungen: Ist $t \in I_{\max} \cap [t_0, \infty[$ und existiert ein $s \in I_{\max}$ mit $s > t$, so ist $s \in I_\gamma$ für ein $\gamma \in \Gamma$, folglich $[t_0, s] \subseteq I_\gamma$ und $\gamma_{\max}|_{[t_0,s]} = \gamma|_{[t_0,s]}$. Die rechtsseitige Ableitung von $\gamma_{\max}$ an der Stelle t existiert also und stimmt mit

$$\gamma'(t) = f(t, \gamma(t)) = f(t, \gamma_{\max}(t)) \tag{161}$$

überein. Analog existiert die linksseitige Ableitung von $\gamma_{\max}$ an einer Stelle $t \in I_{\max} \cap]-\infty, t_0]$ und stimmt mit $f(t, \gamma_{\max}(t))$ überein, wenn ein $s \in I_{\max}$ mit $s < t$ existiert. Sei nun $t \in I_{\max} \cap [t_0, \infty[$ und existiere ein $s \in I_{\max}$ mit $s < t$. Ist $t = t_0$, so wurde die linksseitige Ableitung an der Stelle t gerade diskutiert. Ist $t > t_0$, so können wir $s \geq t_0$ wählen. Es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ mit $t \in I_\gamma$. Dann ist $[t_0, t] \subseteq I_\gamma$ und $\gamma_{\max}|_{[t_0,t]} = \gamma|_{[t_0,t]}$; die linksseitige Ableitung von $\gamma_{\max}$ an der Stelle t existiert also und ist durch (161) gegeben. Analog existiert die rechtsseitige Ableitung von $\gamma_{\max}$ und ist gleich $f(t, \gamma_{\max}(t))$ an jeder Stelle $t \in I_{\max} \cap]-\infty, t_0]$, für die ein $s \in I_{\max}$ mit $s > t$ existiert. $\square$

Lokale Existenz von Lösungen

Wir untersuchen nun die Existenz von Lösungen zu Anfangswertproblemen und werden sehen, dass diese unter schwachen Voraussetzungen gewährleistet ist. Wieder spielen Lipschitzbedingungen eine Rolle. Wir werden die Lösungen als Fixpunkte gewisser Abbildungen erhalten. Wir kennen aus der Analysis 2 bereits den Banachschen Fixpunktsatz über Fixpunkte von Kontraktionen. Dieser könnte eingesetzt werden, würde aber schlechtere Ergebnisse (kleinere Defintionsbereiche der konstruierten Lösung) liefern als der folgende Fixpunktsatz, den wir statt dessen benutzen werden.

Satz 28.10 (Quantitativer Existenzsatz). *Es seien $a < b$ und $R > 0$ reelle Zahlen, $t_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\overline{B}_R(y_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Kugel um y_0 bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Weiter sei*

$$f\colon [a, b] \times \overline{B}_R(y_0) \to \mathbb{R}^n$$

eine stetige Funktion, die eine Lipschitzbedingung erfüllt und $M > 0$ eine reelle Zahl derart, dass[39]

$$\|f(t, y)\| \leq M \quad \text{für alle } (t, y) \in [a, b] \times \overline{B}_R(y_0).$$

[39] Ist f nicht die Nullfunktion, so können wir einfach $M := \|f\|_\infty$ nehmen.

Sei $L > 0$ eine Lipschitzkonstante für f. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

eine Lösung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ auf dem Intervall

$$I := [a,b] \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

mit

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{R}{M}, \frac{1}{2L}\right\}. \tag{162}$$

Bemerkung 28.11 Der Beweis zeigt auch: Schreiben wir $\widetilde{y}_0$ für die konstante Funktion $I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y_0$, so definiert $\phi_0 := \widetilde{y}_0$,

$$\phi_k(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{k-1}(s))\, ds$$

für $k \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $\phi_k\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit Werten in $\overline{B}_R(y_0)$ und ϕ_k konvergiert gleichmäßig gegen γ für $k \to \infty$.

Bemerkung 28.12 Eine genauere Betrachtung zeigt, dass sogar $\varepsilon := \frac{R}{M}$ gewählt werden kann.

Beweis. Es ist $F := C(I, \mathbb{R}^n)$ ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Die abgeschlossene Kugel um $\widetilde{y}_0$ in F vom Radius R ist

$$\overline{B}^F_R(\widetilde{y}_0) = \{\gamma \in C(I, \mathbb{R}^n)\colon (\forall t \in I)\ \underbrace{\|\gamma(t) - y_0\| \leq R}_{\Leftrightarrow \gamma(t) \in \overline{B}_R(y_0)}\}.$$

Als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist $\overline{B}^F_R(\widetilde{y}_0)$ vollständig (bzgl. der Metrik $(\gamma, \eta) \mapsto \|\gamma - \eta\|_\infty$). Gegeben $\gamma \in B^F_R(\widetilde{y}_0)$ definieren wir eine Funktion $T(\gamma)\colon I \to \mathbb{R}^n$ via

$$T(\gamma)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s))\, ds.$$

Da die Funktion $s \mapsto f(s, \gamma(s))$ stetig ist, ist $T(\gamma)$ nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung differenzierbar mit Ableitung

$$T(\gamma)(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s))\, ds = f(t, \gamma(t)), \tag{163}$$

welche eine stetige $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion von t ist. Also ist $T(\gamma) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und insbesondere $T(\gamma) \in C(I, \mathbb{R}^n) = F$. Da

$$\begin{aligned}\|T(\gamma)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s))\, ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| \sup\{\|f(s, \gamma(s))\| \colon s \in I\} \leq \varepsilon M \leq R\end{aligned}$$

für alle $t \in I$, ist $T(\gamma) \in \overline{B}_R^F(\widetilde{y}_0)$. Also ist

$$T \colon \overline{B}_R^f(\widetilde{y}_0) \to \overline{B}_R^F(\widetilde{y}_0), \quad \gamma \mapsto T(\gamma)$$

eine Selbstabbildung von $\overline{B}_R^F(\widetilde{y}_0)$. Wir behaupten, dass T eine Kontraktion ist. Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind dann also erfüllt und somit hat T einen Fixpunkt γ (den wir als gleichmäßigen Grenzwert $\gamma = \lim_{k\to\infty} T^k(\phi_0)$ berechnen können). Dann ist $\gamma = T(\gamma) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ (siehe Beweisanfang),

$$\gamma(t_0) = T(\gamma)(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \gamma(s))\, ds = y_0$$

und wegen (163) ist

$$\gamma'(t) = T(\gamma)'(t) = f(t, \gamma(t)),$$

somit γ eine Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$.

Zum Beweis der Behauptung seien $\phi, \psi \in \overline{B}_R^F(\widetilde{y}_0)$. Für alle $t \in I$ gilt dann

$$\begin{aligned}T(\psi)(t) - T(\phi)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s))\, ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s))\, ds \right) \\ &= \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) - f(s, \phi(s))\, ds.\end{aligned}$$

Im Fall $t \geq t_0$ ist dann

$$\begin{aligned}\|T(\psi)(t) - T(\phi)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) - f(s, \phi(s))\, ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s, \psi(s)) - f(s, \phi(s))\|}_{\leq L\|\psi(s) - \phi(s)\|}\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L\, \underbrace{\|\psi(s) - \phi(s)\|}_{\leq \|\psi - \phi\|_\infty}\, ds \\ &\leq (t_0 - t)\, L\, \|\psi - \phi\|_\infty \leq \varepsilon L\, \|\psi - \phi\|_\infty.\end{aligned}$$

Auch im Falle $t \leq t_0$ gilt

$$\|T(\psi)(t) - T(\phi)(t)\| \leq \varepsilon L \, \|\psi - \phi\|_\infty$$

(und somit für alle $t \in I$); man hat lediglich t und t_0 zu vertauschen ab der zweiten Zeile der vorigen Rechnung. Bildung des Supremums über $t \in I$ liefert

$$\|T(\psi) - T(\phi)\|_\infty \leq \varepsilon L \, \|\psi - \phi\|_\infty.$$

Also ist T Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante εL und somit eine Kontraktion, da $\varepsilon L \leq \frac{1}{2} < 1$ per Definition von ε. $\square$

Satz 28.13 (Qualitativer Existenzsatz von Picard-Lindelöf). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt und $(t_0, y_0) \in U$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y'(t) &= \quad f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= \quad y_0 \end{cases}$$

eine Lösung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$.

Bemerkung 28.14 Die Schlussfolgerung des Satzes bleibt gültig mit einem nicht notwendig offenen, aber in J relativ offenen Intervall $I \subseteq J$, wenn $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall ist, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $U \subseteq J \times V$ eine relativ offene Menge. Wir beweisen diese Verallgemeinerung (wobei die Wahl $J := \mathbb{R}$ auf den obigen Spezialfall zurückführt).

Beweis. Im Folgenden beziehen sich alle Kugeln auf die Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n+1}$. Gegeben $(t_0, y_0) \in U \subseteq J \times V$ dürfen wir nach Ersetzen von U durch eine relativ offene (t_0, y_0)-Umgebung in U annehmen, dass U eine Lipschitzbedingung erfüllt mit einer Lipschitzkonstanten $L > 0$. Es gibt ein $R > 0$ derart, dass

$$\overline{B}_R^{\mathbb{R}^{n+1}}(t_0, y_0) \cap (J \times V) \subseteq U,$$

wobei

$$\overline{B}_R^{\mathbb{R}^{n+1}}(t_0, y_0) = [t_0 - R, t_0 + R] \times \overline{B}_R^{\mathbb{R}^n}(y_0).$$

Da V in $\mathbb{R}^n$ offen ist, dürfen wir nach Verkleinern von R annehmen, dass

$$\overline{B}_R^{\mathbb{R}^n}(y_0) \subseteq V.$$

Wir können reelle Zahlen $a < b$ derart wählen, dass $[a, b]$ eine Umgebung von t_0 in J ist. Nachdem wir a notfalls vergrößern und b verkleinern, dürfen wir annehmen, dass

$$t_0 - a \leq R \quad \text{und} \quad b - t_0 \leq R,$$

also $[a, b] \subseteq [t_0 - R, t_0 + R]$. Folglich ist

$$K := [a, b] \times \overline{B}_R^{\mathbb{R}^n}(y_0) \subseteq \overline{B}_R^{\mathbb{R}^{n+1}}(t_0, y_0) \cap (J \times V) \subseteq U.$$

Da K kompakt ist, ist die stetige Funktion $f|_K$ beschränkt, also

$$M := \|f|_K\|_\infty + 1 < \infty.$$

Also erfüllt f auf $[a, b] \times \overline{B}_R^{\mathbb{R}^n}(y_0)$ die Voraussetzungen des Quantitativen Existenzsatzes und das betrachtete Anfangswertproblem besitzt somit eine auf $[a, b] \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ definierte Lösung mit ε wie in (162). $\square$

Bemerkung 28.15 In der Situation von Satz 28.13 gilt nach Satz 28.4 auch lokale Eindeutigkeit für Lösungen der Differentiagleichung. Man spricht daher auch vom *Lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz* von Picard-Lindelöf.

29 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel führen wir Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein. Diese treten sehr natürlich in der Physik auf. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz über die Bewegung eines Körpers ist nämlich die Ableitung des Impulses $m\,x'(t)$ gleich der auf den Körper wirkenden Kraft F. Ist die Masse m unabhängig von t, so ist also

$$m\,x''(t) \;=\; F$$

mit der Beschleunigung $x''(t)$. Die Kraft hängt häufig nur von der Zeit t, der Position $x(t) \in \mathbb{R}^3$ des Körpers und seiner Geschwindigkeit $x'(t)$ ab. In diesem Fall erhalten wir die Differentialgleichung

$$m\,x''(t) = F(t, x(t), x'(t))$$

(wobei man in der Physik natürlich $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ für erste und zweite Zeitableitungen schreibt).

Wir beschränken uns auf Differentialgleichungen für reellwertige Funktionen.

Definition 29.1 Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Eine *Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rechter Seite f* ist eine Gleichung der Form

$$y''(t) = \; f(t, y(t), y'(t)). \tag{164}$$

Eine *Lösung* der Differentialgleichung (164) ist eine C^2-Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem nicht entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass

$$(t, \phi(t), \phi'(t)) \in U \quad \text{für alle } t \in I$$

und

$$\phi''(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t)).$$

Sind $(t_0, y_0, v_0) \in U$, so nennen wir eine Funktion $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$\left\{ \begin{array}{rcc} y''(t) & = & f(t, x(t), y'(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \\ y'(t_0) & = & v_0, \end{array} \right.$$

wenn ϕ eine Lösung der Differentialgleichung $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$ ist und zudem $t_0 \in I$ ist und die Bedingungen $\phi(t_0) = y_0$ und $\phi'(t_0) = v_0$ erfüllt sind.

Beispiel 29.2 Da $\sin'(t) = \cos(t)$, $\sin''(t) = \cos'(t) = -\sin(t)$, $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, ist die Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y''(t) &= -y(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{cases}$$

Im folgenden diskutieren wir ausschließlich lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, eine besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen.

Definition 29.3 Eine *lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ist eine Differentialgleichung der Form

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) \;=\; b(t)$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion $b\colon J \to \mathbb{R}$ auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Ist $b = 0$, so sprechen wir von einer *homogenen* linearen Differentiagleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; andernfalls heißt die DGL *inhomogen*.

Wir betrachten also die Differentialgleichung

$$y''(t) \;=\; -a_0\, y(t) - a_1\, y'(t) + b(t),$$

das heißt

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

mit

$$f\colon J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t, y, v) \mapsto -a_0\, y - a_1\, v + b(t).$$

Im Falle homogener linearer DGLn können wir stets $J = \mathbb{R}$ wählen.

Satz 29.4 (Globale Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit). *Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $b\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nicht entarteten Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Für alle $t_0 \in J$ und $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) *Es existiert eine auf ganz J definierte Lösung $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) &= b(t) \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= v_0. \end{cases}$$

(b) *Ist I ein nicht entartetes Intervall mit $t_0 \in I \subseteq J$ und $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems aus* (a), *so ist $\psi = \phi|_I$.*

Insbesondere gibt es für alle $t_0 \in J$ und $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ genau eine auf ganz J definierte Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. (a) Nach 27.20 (a) gibt es eine Lösung

$$(\phi, \eta)\colon J \to \mathbb{R}^2$$

des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \tag{165}$$

mit $(\phi(t_0), \eta(t_0)) = (y_0, v_0)$. Dann ist also $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit

$$\phi'(t) = \eta(t)$$

und $\eta\colon J \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit

$$\eta'(t) = -a_0\, \phi(t) - a_1\, \eta(t) + b(t).$$

Insbesondere ist ϕ eine C^2-Funktion und Einsetzen von $\eta = \phi'$, $\eta' = \phi''$ in die vorige Gleichung liefert

$$\phi''(t) = -a_0\, \phi(t) - a_1\, \phi'(t) + b(t).$$

Da zudem $\phi(t_0) = y_0$ und $\phi'(t_0) = \eta(t_0) = v_0$, ist ϕ eine Lösung des Anfangswertproblems in (a).

(b) Ist auch $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems in (a), so ist (ψ, ψ') eine Lösung des Differentialgleichungssystems (165) mit $(\psi(t_0), \psi'(t_0)) = (y_0, v_0)$, also $(\psi, \psi') = (\phi, \eta)|_I$ nach 27.20 (b) und insbesondere $\psi = \phi|_I$. □

Satz 29.5 (Lösungsmenge einer homogenen linearen DGL zweiter Ordnung). *Es seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Die Menge L_h aller auf J definierten Lösungen $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ der DGL $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ ist ein 2-dimensionaler Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^J$ aller reellwertigen Funktionen auf J.*

(b) *Es sei $t_0 \in J$. Zwei Lösungen $\phi_1, \phi_2 \in L_h$ der DGL bilden genau dann eine Basis für L_h, wenn die Vektoren*

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_1'(t_0) \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(t_0) \\ \phi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

eine Basis für $\mathbb{R}^2$ sind.

Bemerkung 29.6 Die in (b) angegebenen Vektoren bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^2$, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_2(t_0) \\ \phi_1'(t_0) & \phi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, also die Determinante

$$W(\phi_1, \phi_2)(t_0) := \det \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) & \phi_2(t_0) \\ \phi_1'(t_0) & \phi_2'(t_0) \end{pmatrix} = \phi_1(t_0)\phi_2'(t_0) - \phi_1'(t_0)\phi_2(t_0)$$

von Null verschieden ist. Man nennt $W(\phi_1, \phi_2)(t_0)$ die *Wronski-Determinante* von ϕ_1 und ϕ_2 zur Zeit t_0.

Beweis für 29.5. (a) Sind $\phi_1, \phi_2 \in L_h$, so ist

$$(\phi_1+\phi_2)''+a_1(\phi_1+\phi_2)'+a_0(\phi_1+\phi_2) = \underbrace{\phi_1'' + a_1\phi_1' + a_0\phi_1}_{=0} + \underbrace{\phi_2'' + a_1\phi_2' + a_0\phi_2}_{=0} = 0,$$

also $\phi_1 + \phi_2 \in L_h$. Ähnlich sieht man, dass $\lambda\phi \in L_h$ für alle $\phi \in L_h$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Für $t_0 \in J$ ist die Abbildung

$$\alpha_{t_0} \colon L_h \to \mathbb{R}^2, \quad \phi \mapsto \begin{pmatrix} \phi(t_0) \\ \phi'(t_0) \end{pmatrix}$$

linear. Da nach 29.4 für alle

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= v_0 \end{cases}$$

eine Lösung $\phi \in L_h$ besitzt, ist α_{t_0} surjektiv. Da die Lösung eindeutig ist, ist α_{t_0} auch injektiv und somit ein Isomorphismus von Vektorräumen. Insbesondere ist

$$\dim(L_h) = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

(b) Da $\alpha_{t_0} \colon L_h \to \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, sind $\phi_1, \phi_2 \in L_h$ genau dann linear unabhängig (und somit eine Basis für L_h), wenn

$$\alpha_{t_0}(\phi_1) = \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \phi_1'(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha_{t_0}(\phi_2) = \begin{pmatrix} \phi_2(t_0) \\ \phi_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig (und somit eine Basis) sind. □

Definition 29.7 Bilden $\phi_1, \phi_2 \in L_h$ eine Basis für L_h, so nennt man das Paar (ϕ_1, ϕ_2) auch ein *Lösungsfundamentalsystem* für die homogene lineare DGL $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Beispiel 29.8 (Harmonischer Oszillator). Für $\omega_0 > 0$ betrachten wir die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2\, y = 0$$

zweiter Ordnung, die sogenannte *Schwingungsgleichung*. Dann bilden die durch

$$\phi_1(t) := \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad \phi_2(t) := \cos(\omega_0 t)$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem. Wegen

$$\phi_1'(t) = \omega_0 \cos(\omega_0 t), \quad \phi_1''(t) = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2\, \phi_1(t)$$

ist ϕ_1 eine Lösung der Schwingungsgleichung. Da

$$\phi_2'(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad \phi_2''(t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2\, \phi_2(t),$$

ist auch ϕ_2 eine Lösung der Schwingungsgleichung. Weil die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, ist (ϕ_1, ϕ_2) ein Lösungsfundamentalsystem.

Beliebige Linearkombinationen

$$\phi(t) = \alpha \sin(\omega_0 t) + \beta \cos(\omega_0 t)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind dann ebenfalls Lösungen der Schwingungsgleichung. All diese sind übrigens harmonische Schwingungen der Form

$$\phi(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \sin(\omega_0 t + c)$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$, als Konsequenz des (aus der Analysis 1 bekannten) Additionstheorems

$$\cos(\sigma)\sin(\tau) + \sin(\sigma)\cos(\tau) = \sin(\sigma + \tau)$$

für $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

29.9 *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega_0 > 0$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$a\,\sin(\omega_0 t) + b\,\cos(\omega_0 t) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(\omega_0 t + c).$$

Die Aussage ist trivial, wenn $a = b = 0$. Seien nun nicht a und b beide 0, also $a^2 + b^2 > 0$. Der Punkt

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

liegt auf dem Einheitskreis, ist also von der Form $(\cos(c), \sin(c))$ für ein $c \in [0, 2\pi[$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a\,\sin(\omega_0 t) + b\,\cos(\omega_0 t) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\sin(\omega_0 t),\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\cos(\omega_0 t) \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos(c)\sin(\omega_0 t) + \sin(c)\cos(\omega_0 t)) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(\omega_0 t + c). \end{aligned}$$

Satz 29.10 *Wir betrachten eine homogene lineare Differentialgleichung*

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y \;=\; 0 \tag{166}$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir bilden das Polynom

$$p(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

mit $z \in \mathbb{C}$, das sogenannte **charakteristische Polynom***.*

(a) *Hat p zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so bilden die durch*

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare DGL (166)*.*

(b) *Hat p eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, so bilden die durch*

$$\phi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \phi_2(t) = t\, e^{\lambda t}$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare DGL (166)*.*

(c) *Hat p ein Paar nicht reeller, komplex konjugierter komplexer Nullstellen $\alpha \pm i\omega$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$, so bilden die durch*

$$\phi_1(t) = e^{\alpha t} \sin(\omega t), \quad \phi_2(t) = e^{\alpha t} \cos(\omega t)$$

gegebenen Funktionen $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene lineare DGL (166)*.*

Beweis. (a) Für $\phi_j(t) = e^{\lambda_j t}$ mit $j \in \{1, 2\}$ und $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\phi_j'(t) = \lambda_j\, e^{\lambda_j t} = \lambda_j\, \phi_j(t) \quad \text{und} \quad \phi_j''(t) = \lambda_j^2\, e^{\lambda_j t} = \lambda_j^2\, \phi_j(t),$$

also

$$\phi_j''(t) + a_1\, \phi_j'(t) + a_0\, \phi_j(t) = (\lambda_j^2 + a_1\, \lambda_j + a_0)\, \phi_j(t) = p(\lambda_j)\, \phi_j(t) = 0.$$

Somit sind ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen der DGL $y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$. Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind (mit Wronski-Determinante $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$), ist (ϕ_1, ϕ_2) ein Lösungsfundamentalsystem.

(b) Wie im Beweis von (a) sieht man, dass

$$\phi_1'' + a_1\, \phi_1' + a_0\, \phi_1 = p(\lambda)\, \phi_1 = 0.$$

Da $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (t-\lambda)^2$ die doppelte reelle Nullstelle λ hat, ist $p'(\lambda) = 2(\lambda - \lambda) = 0$. Andererseits ist $p(t) = t^2 + a_1\, t + a_0$, also

$$p'(t) = 2\,t + a_1,$$

also

$$0 = p'(\lambda) = 2\,\lambda + a_1.$$

Nun ist

$$\phi_2'(t) = e^{\lambda\, t} + t\lambda\, e^{\lambda\, t}$$

und

$$\phi_2''(t) = \lambda\, e^{\lambda\, t} + \lambda\, e^{\lambda\, t} + t\lambda^2\, e^{\lambda\, t} = 2\,\lambda\, e^{\lambda\, t} + t\,\lambda^2\, e^{\lambda\, t},$$

also

$$\begin{aligned}
\phi_2''(t) + a_1\,\phi_2'(t) + a_0\,\phi_2(t) &= (2\,\lambda + t\,\lambda^2 + a_1 \ + a_1\,t\lambda + a_0)\, e^{\lambda\, t} \\
&= (\underbrace{2\,\lambda + a_1}_{=p'(\lambda)=0} + \underbrace{(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)}_{=p(\lambda)=0}\ t)\, e^{\lambda\, t} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist auch ϕ_2 eine Lösung der homogenen DGL. Man beachte, dass $\phi_2(0) = 0$ und $\phi_2'(0) = 1$. Also ist

$$\begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Wronski-Determinante $1 \neq 0$, somit (ϕ_1, ϕ_2) ein Lösungsfundamentalsystem.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
p(z) &= (z - \alpha - i\omega)(z - \alpha + i\omega) = z^2 + (-\alpha - i\omega - \alpha + i\omega)z + (\alpha + i\omega)(\alpha - i\omega) \\
&= z^2 - 2\alpha\, z + |\alpha + i\omega|^2 = z^2 - 2\alpha\, z + (\alpha^2 + \omega^2).
\end{aligned}$$

Vergleich mit

$$p(z) = z^2 + a_1\, z + a_0$$

zeigt, dass

$$-2\alpha = a_1 \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \omega^2 = a_0.$$

Für $\phi_1(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ und $\phi_2(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\phi_1'(t) &= \alpha\, e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \omega\, e^{\alpha t}\cos(\omega t),\\
\phi_2'(t) &= \alpha\, e^{\alpha t}\cos(\omega t) - \omega\, e^{\alpha t}\sin(\omega t),\\
\phi_1''(t) &= \alpha^2\, e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \alpha\omega\, e^{\alpha t}\cos(\omega t) + \alpha\omega\, e^{\alpha t}\cos(\omega t) - \omega^2\, e^{\alpha t}\sin(\omega t),\\
\phi_2''(t) &= \alpha^2\, e^{\alpha t}\cos(\omega t) - \alpha\omega\, e^{\alpha t}\sin(\omega t) - \alpha\omega\, e^{\alpha t}\sin(\omega t) - \omega^2\, e^{\alpha t}\cos(\omega t).
\end{aligned}
$$

Also ist $\phi_1''(t) + a_1\,\phi_1'(t) + a_0\,\phi_1(t)$ gleich

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2\, e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \alpha\omega\, e^{\alpha t}\cos(\omega t) + \alpha\omega\, e^{\alpha t}\cos(\omega t) - \omega^2\, e^{\alpha t}\sin(\omega t)\\
&+ \underbrace{a_1}_{=-2\alpha}(\alpha\, e^{\alpha t}\sin(\omega t) + \omega\, e^{\alpha t}\cos(\omega t)) + \underbrace{a_0}_{=\alpha^2+\omega^2}\, e^{\alpha t}\sin(t) = 0,
\end{aligned}
$$

somit ϕ_1 eine Lösung der DGL. Analog sieht man, dass auch ϕ_2 die DGL löst. Nun sind

$$
\begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \phi_2(0) \\ \phi_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}
$$

linear unabhängig, mit Wronski-Determinante $W(\phi_1, \phi_2)(0) = -\omega \neq 0$. Also ist (ϕ_1, ϕ_2) ein Lösungsfundamentalsystem. □

Die folgenden Beispiele konnten aus Zeitgründen nicht mehr behandelt werden. Sie sind ein wichtiger Gegenstand der Allgemeinbildung und äußerst schulrelevant.

Beispiel 29.11 Seien $\nu, \omega_0 > 0$. In der Physik beschreibt die homogene lineare Differentalgleichung

$$
y'' + \nu\, y' + \omega_0^2\, y = 0 \tag{167}
$$

einen gedämpften Oszillator.[40] Das charakteristische Polynom lautet

$$
p(z) = z^2 + \nu\, z + \omega_0^2
$$

und wir haben

$$
0 = p(z) = z^2 + \nu\, z + \omega_0^2 = (z + \nu/2)^2 + \omega_0^2 - \nu^2/4
$$

[40] Es handelt sich um sogenannte "lineare" Dämpfung, die proportional zu $y'(t)$ ist. Bei Gleitreibung oder Haftreibung eines Körpers auf einer Oberfläche ist dies *nicht* (!) der Fall.

genau dann, wenn

$$(z + \nu/2)^2 = \nu^2/4 - \omega_0^2. \tag{168}$$

1. Fall (Schwingfall): Ist $\nu^2/4 - \omega_0^2 < 0$, so können wir (168) schreiben als

$$(z + \nu/2)^2 = -(\omega_0^2 - \nu^2/4)$$

mit $\omega_0^2 + \nu^2/4 > 0$. Wir haben also ein Paar komplex konjugierter, nicht reeller Nullstellen,

$$z_1 = -\nu/2 + i\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}, \quad z_2 = -\nu/2 - i\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$$

der Vielfachheit 1. Nach 29.10 (c) bilden also die Funktionen

$$t \mapsto e^{-\frac{\nu}{2}t} \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad t \mapsto e^{-\frac{\nu}{2}t} \cos(\omega t)$$

mit $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2/4}$ ein Lösungsfundamentalsystem.

2. Fall (Kriechfall). Ist $\nu^2/4 - \omega_0^2 > 0$, so hat p die zwei reellen Nullstellen

$$\lambda_1 = -\nu/2 - \sqrt{\nu^2/4 - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\nu/2 + \sqrt{\nu^2/4 - \omega_0^2}$$

der Vielfachheit 1. Offenbar ist $\lambda_1 < 0$ und es ist auch $\lambda_2 < 0$, weil $\sqrt{\nu^2/4 - \omega_0^2} < \sqrt{\nu^2/4} = \nu/2$. Nach 29.10 (a) bilden die Funktionen

$$t \mapsto e^{t\lambda_1} \quad \text{und} \quad t \mapsto e^{t\lambda_2}$$

ein Lösungsfundamentalsystem.

3. Fall (aperiodischer Grenzfall). Ist $\nu^2/4 - \omega_0^2 = 0$, so hat p die doppelte Nullstelle

$$\lambda = -\nu/2.$$

Nach 29.10 (b) bilden also die Funktionen

$$t \mapsto e^{-\frac{\nu}{2}t} \quad \text{und} \quad t \mapsto t\, e^{-\frac{\nu}{2}t}$$

ein Lösungsfundamentalsystem.

Bemerkung 29.12 Beachten Sie, dass $\phi_1(t) \to 0$ und $\phi_2(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Da jede Lösung ϕ der DGL eine Linearkombination $\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ von ϕ_1 und ϕ_2 ist, folgt $\phi(t) \to \alpha 0 + \beta 0 = 0$ für $t \to \infty$.

Bemerkung 29.13 Betrachten wir im Kriechfall oder aperiodischen Grenzfall eine Lösung ϕ der DGL mit $\phi(t_0) > 0$. Drei Fälle können auftreten:

(a) Es ist $\phi'(t_0) > 0$. Dann ist ϕ auf einem Intervall $[t_0, T]$ monoton wachsend, ab T dann monoton fallend mit $\phi(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(b) Es ist $\phi'(t_0) \leq 0$ und ϕ ist auf $[t_0, \infty[$ monoton fallend mit $\phi(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(c) Es ist $\phi'(t_0) < 0$ und ϕ ist auf einem Intervall $[t_0, T]$ monoton fallend mit $\phi(T) < 0$, anschließend monoton wachsend mit $\phi(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Eine Linearkombination $\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \neq 0$ hat nämlich höchstens eine lokale Extremalstelle. In der Tat ist im Kriechfall

$$\phi(t) = \alpha\, e^{\lambda_1 t} + \beta\, e^{\lambda_2 t}$$

mit

$$\phi'(t) = \alpha\lambda_1\, e^{\lambda_1 t} + \beta\lambda_2\, e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1 t}(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2\, e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}),$$

also $\phi'(t) = 0$ genau dann, wenn

$$\beta\lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = -\alpha\lambda_1,$$

was für höchstens ein $t \geq t_0$ erfüllt ist. Im aperiodischen Grenzfall ist

$$\phi(t) = \alpha\, e^{-\frac{\nu}{2}t} + \beta\, t\, e^{-\frac{\nu}{2}t} = (\alpha + \beta\, t)\, e^{-\frac{\nu}{2}t},$$

also

$$\phi'(t) = \beta\, e^{-\frac{\nu}{2}t} - (\alpha + \beta t)\frac{\nu}{2}e^{-\frac{\nu}{2}t} = \left(\beta - \frac{\nu\alpha}{2} - \frac{\nu\beta}{2}t\right) e^{-\frac{\nu}{2}t}.$$

Folglich ist $\phi'(t) = 0$ genau dann, wenn

$$\frac{\nu\beta}{2}t = \beta - \frac{\nu\alpha}{2},$$

was für höchstens ein $t \in [t_0, \infty[$ der Fall ist.

Inhomogene lineare DGLn zweiter Ordnung

Satz 29.14 *Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht entartetes Intervall und $b\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei L_h die Menge aller Lösungen $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL*

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und L_i die Menge aller Lösungen der inhomogenen linearen DGL

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = b(t)$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ist $\phi_p \in L_i$ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL, so ist

$$L_i = \phi_p + L_h = \{\phi_p + \phi\colon \phi \in L_h\}.$$

Bemerkung 29.15 Traditionell nennt man ϕ_p eine *partikuläre Lösung* der inhomogenen linearen DGL und kann 29.14 dann wie folgt zusammenfassen:

"*Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DGL erhält man, indem man zu einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen DGL addiert.*"

Beweis für 29.14. Für jedes $\phi \in L_h$ rechnet man sofort nach, dass $\phi_p + \phi$ die inhomogene lineare DGL erfüllt. Für jedes $\phi \in L_i$ rechnet man sofort nach, dass $\phi - \phi_p$ die zugehörige homogene DGL erfüllt, also $\phi - \phi_p \in L_h$ ist und somit $\phi = \phi_p + (\phi - \phi_p) \in \phi_p + L_h$. $\square$

Beispiel 29.16 (Getriebener Oszillator). Lässt man auf einen harmonischen Oszillator zusätzlich eine äußere Kraft wirken, die eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz $\Omega > 0$ ist, erhält man eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$y''(t) + \omega_0^2\, y(t) = a\, \sin(\Omega t + b). \tag{169}$$

(a) Ist $\Omega \neq \omega_0$, so ist

$$\phi_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + b)$$

eine partikuläre Lösung, wie man durch Einsetzen von $\phi_p(t)$ und

$$\phi_p''(t) = -\frac{a\,\Omega^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin(\Omega t + b)$$

in die inhomogene lineare DGL (169) sofort verifiziert.

(b) (Resonanzkatastrophe). Ist $\Omega = \omega_0$, wird der Oszillator also mit seiner Resonanzfrequenz angeregt, so ist

$$\phi_p(t) = -\frac{a}{2\,\omega_0}\,t\,\cos(\omega_0 t + b)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen DGL (169). Es ist nämlich

$$\phi_p'(t) = -\frac{a}{2\,\omega_0}\,\cos(\omega_0 t + b) + \frac{a}{2}\,t\,\sin(\omega_0 t + b).$$

Durch Einsetzen von $\phi_p(t)$ und

$$\begin{aligned}\phi_p''(t) &= \frac{a}{2}\,\sin(\omega_0 t + b) + \frac{a}{2}\,\sin(\omega_0 t + b) + \frac{a\omega_0}{2}\,t\,\cos(\omega_0 t + b)\\ &= a\,\sin(\omega_0 t + b) + \frac{a\omega_0}{2}\,t\,\cos(\omega_0 t + b)\end{aligned}$$

in (169) verifiziert man sofort, dass ϕ_p die inhomogene lineare DGL löst, also eine partikuläre Lösung ist.

Beachten Sie, dass für $t = \frac{2\pi n - b}{\omega_0}$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_p(t) = -\frac{a}{2\,\omega_0^2}\,(2\pi n - b)$$

ist, was für $n \to \infty$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert. Es gibt also beliebig große Auslenkungen und gleiches gilt für jede Lösung $\phi + \phi_p$ der inhomogenen DGL mit $\phi \in L_h$, da ϕ eine Linearkombination von $\sin(\omega_0 t)$ und $\cos(\omega_0 t)$ und somit eine beschränkte Funktion ist. Zwar wird die Modellierung bei beliebig großen Auslenkungen irgendwann unpräzise; dennoch muss man befürchten, dass ein schwingendes Werkstück dann zerstört werden könnte.

A Grundwissen über Polynome

Bei der Diskussion von Partialbruchzerlegungen benutzen wir einige elementare Tatsachen über Polynome, die wahrscheinlich vielen aus der Linearen Algebra bekannt sind. Wir listen diese Fakten nun auf und wiederholen kurz ihre Beweise. Wir benötigen das folgende Lemma mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (die Aussagen (a)–(i) und ihre Beweise gelten jedoch ebenso über einem beliebigen unendlichen Körper $\mathbb{K}$). Anders als in fortgeschrittenen Vorlesungen zur Algebra betrachten wir Polynom*funktionen* $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, nicht lediglich abstrakte Polynome (also Linearkombinationen von Monomen in einer formalen Unbestimmten). Da $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente hat, legt eine Polynomfunktion ihre Koeffizienten eindeutig fest (siehe Aussage (e)), so dass der abstrakte allgemeinere Zugang für unsere Zwecke unnötig ist und Polynomfunktionen und Polynome als synonym betrachtet werden können. Wir verwenden folgende Tatsachen:

Lemma A.1 *Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ und $f, g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ die Polynomfunktionen, die durch $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ und $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ gegeben sind. Dann gilt:*

(a) *Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $f(\alpha) = 0$ und ist f nicht die Nullfunktion, so ist $n \geq 1$ und es gibt eine Polynomfunktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$ mit $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$ derart, dass*

$$f(x) = (x - \alpha)h(x) \ \text{für alle } x \in \mathbb{K}.$$

(b) *Ist f nicht die Nullfunktion, so gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n\}$, Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ und eine Polynomfunktion $h\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form $h(x) = \sum_{j=0}^{n-k} c_j x^j$ mit $c_0, \ldots, c_{n-k} \in \mathbb{K}$ derart, dass*

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)h(x) \ \text{ und } \ h(x) \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{K}$. Weiter ist dann $\{x \in \mathbb{K}\colon f(x) = 0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

(c) *Gibt es eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ mit mindestens $1 + \max\{m, n\}$ Elementen (z.B. eine unendliche Teilmenge) derart, dass*

$$f(x) = g(x) \ \text{für alle } x \in M,$$

so ist $f = g$.

(d) *Ist f die Nullfunktion, so ist $a_j = 0$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$.*

(e) *Nach Vertauschen von f und g (wenn nötig) sei $n \leq m$. Ist $f = g$, so folgt $a_j = b_j$ für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ und $b_j = 0$ für alle $j \in \{n+1, \ldots, m\}$. In diesem Sinne sind die Koeffizienten einer Polynomfunktion also eindeutig festgelegt.*

(f) *Ist f nicht die Nullfunktion, so ist $a_j \neq 0$ für ein $j \in \{0, \ldots, n\}$ und der Grad* $\deg(f) := \max\{j \colon a_j \neq 0\}$ *ist wohldefiniert. (Man setzt weiter* $\deg(0) := -\infty$*). Es ist* $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

(g) *Ist $g \neq 0$ und $gq_1 = gq_2$ mit Polynomfunktionen $q_1, q_2 \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, so ist $q_1 = q_2$.*

(h) *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$ und $f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell} h(x)$ mit einer Polynomfunktion $h \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ohne Nullstellen in $\mathbb{K}$. Dann ist $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\} = \{x \in \mathbb{K} \colon f(x) = 0\}$ die Menge aller Nullstellen von f und λ_j legt die Zahl n_j (die "Vielfachheit der Nullstelle λ_j") eindeutig fest, für alle $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.*

(i) *Seien auch $f_1, g_1 \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynomfunktionen und $M \subseteq \mathbb{K}$ eine unendliche Teilmenge mit $g(x) \neq 0$ und $g_1(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \text{für alle } x \in M, \tag{170}$$

so ist $f(x)/g(x) = f_1(x)/g_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $g(x) \neq 0$ und $g_1(x) \neq 0$.

(j) *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $a_n = 1$ (also f ein "normiertes" Polynom), so gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ derart, dass $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ für alle $x \in \mathbb{C}$.*

(k) *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine nicht reelle, komplexe Nullstelle von f in dem Sinne, dass die komplexe Polynomfunktion*

$$f_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \;\; z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

λ als Nullstelle besitzt, also $\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0$. Dann ist auch das komplex Konjugierte $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle. Ist f nicht die Nullfunktion, so haben die Nullstellen λ und $\overline{\lambda}$ von $f_{\mathbb{C}}$ die gleiche Vielfachheit.

Beweis. (a) Wäre $n = 0$, so wäre $f(x) = a_0$ und aus $0 = f(\alpha) = a_0$ würde $f(x) = 0$ folgen für alle $x \in \mathbb{K}$ (im Widerspruch zur Annahme). Also ist $n \geq 1$. Eine Polynomdivision zeigt, dass es ein Polynom h wie angegeben und eine Konstante $C \in \mathbb{K}$ derart gibt, dass für alle $x \in \mathbb{K}$

$$f(x) = (x - \alpha)h(x) + C.$$

Einsetzen von $x = \alpha$ liefert $0 = f(\alpha) = C$.

(b) Der Beweis ist per Induktion nach n. Hat f keine Nullstelle in $\mathbb{K}$, so gilt die Aussage mit $k := 0$ und $h := f$. Habe nun f eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{K}$. Ist $n = 1$, so ist $h(x) = c_0$ in (a) und $f(x) = a_1 x + a_0 = (x - \alpha)h(x) = (x - \alpha)c_0$ nicht die Nullfunktion in x, somit $c_0 \neq 0$. Also hat h keine Nullstelle. Gilt die Aussage für $n-1$ statt n, so schreiben wir $f(x) = (x-\alpha)h(x)$ mit h wie in (a). Da f nicht die Nullfunktion ist, kann auch h nicht die Nullfunktion sein. Per Induktion gibt es ein $\ell \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$ und eine Polynomfunktion $H \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form $H(x) = \sum_{j=0}^{n-1-\ell} C_j x^j$ ohne Nullstellen in $\mathbb{K}$ derart, dass

$$h(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_\ell) H(x).$$

Mit $k := \ell + 1$ und $\alpha_k := \alpha$ ist dann $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k) H(x)$ von der gewünschten Form.

(c) Nachdem wir f und g notfalls vertauschen, dürfen wir $n \leq m$ annehmen. Wir setzen $a_j := 0$ für $j \in \{n + 1, \ldots, m\}$. Dann hat die Polynomfunktion

$$g - f \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{j=0}^{n} (b_j - a_j) x^j$$

jedes der Elemente $x \in M$ als Nullstelle. Wäre $g - f$ nicht die Nullfunktion, so hätte $g - f$ nach (b) höchstens n verschiedene Nullstellen, im Widerspruch zu $(g - f)|_M = 0$. Also ist $g - f = 0$ und somit $f = g$.

(d) Widerspruchsbeweis. Angenommen, für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gäbe es $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{K}$ mit $(c_0, \ldots, c_N) \neq (0, \ldots, 0)$ derart, dass

$$h(x) := \sum_{j=0}^{N} c_j x^j = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{K}.$$

Dann könnten wir N minimal wählen mit dieser Eigenschaft. Aufgrund der Minimalität von N wäre $c_N \neq 0$. Wegen $0 = h(0) = c_0$ wäre weiter $N \neq 0$, somit $N \geq 1$. Ausklammern von x liefert nun

$$h(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x^j = xH(x) \text{ mit } H(x) := \sum_{j=0}^{N-1} c_{j+1} x^j$$

für alle $x \in \mathbb{K}$. Also ist $H(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und somit für alle $x \in \mathbb{K}$, nach (c). Dies widerspricht der Minimalität von N. Somit kann kein solches N existieren.

(e) Wir setzen $a_j := 0$ für $j \in \{n+1, \ldots, n\}$. Dann ist $0 = g(x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m}(b_j - a_j)x^j$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und somit $b_j - a_j = 0$ (und folglich $a_j = b_j$) für alle $j \in \{0, \ldots, m\}$, nach (d).

(f) Die Wohldefinertheit des Grads $\deg(f)$ folgt aus (e). Die Gradformel für fg ist klar, wenn $f = 0$ oder $g = 0$. Andernfalls dürfen wir (eventuell nach Verkleinern von n und m) annehmen, dass $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$. Nun ist $(fg)(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j$ mit $c_j := \sum_{k+\ell=j} a_k b_\ell$ mit Summationsindizes $k \in \{0, \ldots, n\}$ und $\ell \in \{0, \ldots, m\}$. Da $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$, folgt $\deg(fg) = \deg(f)\deg(g)$.

(g) Da $0 = g(q_1 - q_2)$ mit $g \neq 0$, muss wegen der Gradformel $q_1 - q_2 = 0$ sein.

(h) Es ist klar, dass $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}$ die Menge der Nullstellen von f ist. Gelte nun auch $f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{m_\ell} H(x)$ mit $m_1, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ und einem Polynom H ohne Nullstellen. Wir zeigen $n_1 = m_1$ (dass $n_j = m_j$ für alle $j \in \{2, \ldots, \ell\}$, kann entsprechend bewiesen werden). Nachdem wir die Rollen der n_j und m_j notfalls vertauschen, dürfen wir annehmen, dass $n_1 \leq m_1$. Dann ist also

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} h_1(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} h_2(x)$$

mit $h_1(x) := (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell} h(x)$ und

$$h_2(x) := (x - \lambda_1)^{m_1 - n_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \ldots (x - \lambda_\ell)^{m_\ell} H(x).$$

Mit (g) folgt $h_1 = h_2$. Somit muss $n_1 = m_1$ sein, denn wäre $m_1 > n_1$, so erhielten wir den Widerspruch $h_2(\lambda_1) = 0 \neq h_1(\lambda_1)$.

(i) Multiplikation von (170) mit $g(x)g_1(x)$ zeigt, dass

$$f(x)g_1(x) = f_1(x)g(x)$$

für alle $x \in M$ und somit für alle $x \in \mathbb{K}$, nach (c). Die Behauptung folgt.

(j) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. In (b) muss daher h konstant sein, also $n-k=0$ und $h(x)=c_0$. Vergleich des Leitkoeffizienten 1 von f mit demjenigen von $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)h(x)=c_0x^n+\cdots$ liefert $c_0=1$.

(k) Aus $0=\sum_{j=0}^n a_j\lambda^j$ folgt

$$0=\overline{0}=\overline{\sum_{j=0}^n a_j\lambda^j}=\sum_{j=0}^n a_j\overline{\lambda}^j$$

(wobei $\overline{a_j}=a_j$, weil $a_j\in\mathbb{R}$). Also ist auch $\overline{\lambda_j}$ eine Nullstelle von $f_{\mathbb{C}}$. Sei nun f nicht das Nullpolynom und ohne Einschränkung $a_n\neq 0$. Seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von f (also auch von $f_{\mathbb{C}}$) und $\lambda_1,\overline{\lambda_1},\ldots,\lambda_\ell,\overline{\lambda_\ell}$ die komplexen nicht-reellen Nullstellen von $f_{\mathbb{C}}$ mit den Vielfachheiten $m_1,k_1,\ldots,m_\ell,k_\ell$. Aus (j) folgt, dass

$$f_{\mathbb{C}}(z)=a_n\prod_{j=1}^k(z-\alpha_j)^{n_j}\prod_{j=1}^\ell(z-\lambda_j)^{m_j}(z-\overline{\lambda_j})^{k_j}$$

für alle $z\in\mathbb{C}$. Also ist

$$\begin{aligned}
&a_n\prod_{j=1}^k(x-\alpha_j)^{n_j}\prod_{j=1}^\ell(x-\lambda_j)^{m_j}(x-\overline{\lambda_j})^{k_j}\\
&\qquad = \quad f(x)=\overline{f(x)}=a_n\prod_{j=1}^k(x-\alpha_j)^{n_j}\prod_{j=1}^\ell(x-\overline{\lambda_j})^{m_j}(x-\lambda_j)^{k_j}
\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Nach (c) folgt für alle $z\in\mathbb{C}$, dass

$$f_{\mathbb{C}}(z)=a_n\prod_{j=1}^k(z-\alpha_j)^{n_j}\prod_{j=1}^\ell(z-\overline{\lambda_j})^{m_j}(z-\lambda_j)^{k_j}.$$

Also gilt $m_j=k_j$ für alle $j\in\{1,\ldots,\ell\}$, nach (h). $\square$

B Existenz von Partialbruchzerlegungen

In diesem nicht prüfungsrelevanten Anhang geben wir einen Beweis für Satz 3.3. Dieser ist eher der Algebra zuzuordnen; der Beweis wurde in der Vorlesung daher übersprungen und der Satz als *black box* benutzt.

Als Hilfsmittel für den Beweis von Satz 3.3 untersuchen wir zunächst Partialbruchzerlegungen im Komplexen; dann ist jedes normierte Polynom q ein Produkt von Linearfaktoren (siehe Lemma A.1(j)). Den Spezialfall von Satz 3.3, in welchem das Nennerpolynom ausschließlich reelle Nullstellen besitzt, können wir gleich mit behandeln.

Satz B.1 (Partialbruchzerlegung im Komplexen) *Seien* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ *paarweise verschieden und* $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. *Sei weiter* $p\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *eine Polynomfunktion vom Grad* $\deg(p) < n_1 + \cdots + n_k$. *Dann gibt es eindeutige Zahlen* $A_{j,\nu} \in \mathbb{K}$ *für* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $\nu \in \{1, \ldots, n_j\}$ *derart, dass*

$$\frac{p(z)}{(z-\alpha_1)^{n_1} \cdots (z-\alpha_k)^{n_k}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(z-\alpha_j)^{\nu}} \tag{171}$$

für alle $z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

Beweis. Sei $q(z) := (z-\alpha_1)^{n_1} \cdots (z-\alpha_k)^{n_k}$. Der Beweis ist per Induktion nach $N := n_1 + \cdots + n_k$. Ist $N = 1$, so ist $k = 1$, $p = A$ ein konstantes Polynom und

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{A}{z-\alpha_1}$$

bereits von der gewünschten Form (wobei A offenbar eindeutig ist, denn wir können ein $z \neq \alpha_1$ einsetzen und nach A auflösen).

Sei nun $N > 1$ und gelte die Aussage bereits für $N-1$ statt N. Multiplikation von (171) mit $q(z)$ führt auf die äquivalente Gleichung[41]

$$p(z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} A_{j,\nu} (z-\alpha_j)^{n_j-\nu} \prod_{m \neq j} (z-\alpha_m)^{n_m}$$

[41] Der Index m durchläuft hier die Menge $\{1, \ldots, k\} \setminus \{j\}$.

für alle $z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ (bzw. äquivalent für alle $z \in \mathbb{K}$, siehe Lemma A.1(c)). Setzen wir $z := \alpha_k$ ein, so verschwinden alle bis auf einen Summanden (mit $j = k$, $\nu = n_k$); es folgt

$$p(\alpha_k) = A_{k,n_k} \prod_{m \neq k} (\alpha_k - \alpha_m)^{n_m}.$$

Somit ist bei Gültigkeit von (171) notwendig

$$A_{k,n_k} = \frac{p(\alpha_k)}{\prod_{m \neq k} (\alpha_k - \alpha_m)^{n_m}}, \tag{172}$$

somit A_{k,n_k} eindeutig festgelegt. Wir definieren nun A_{k,n_k} durch (172) und beobachten, dass dann (171) äquivalent ist zu

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n'_j} \frac{A_{j,\nu}}{(z - \alpha_j)^\nu} = \frac{p(z)}{q(z)} - \frac{A_{k,n_k}}{(z - \alpha_k)^{n_k}} = \frac{Q(z)}{q(z)} \tag{173}$$

mit

$$n'_j := \begin{cases} n_j & \text{wenn } j \in \{1, \ldots, k-1\}, \\ n_k - 1 & \text{wenn } j = k \end{cases}$$

und dem Polynom

$$Q(z) := p(z) - p(\alpha_k) \prod_{m \neq k} \left(\frac{z - \alpha_m}{\alpha_k - \alpha_m} \right)^{n_m}$$

vom Grad $\deg(Q) \leq \deg(p)$ (wobei für das zweite Gleichheitszeichen in (173) der zweite Bruch mit $\prod_{m \neq k} (z - \alpha_m)^{n_m}$ erweitert wurde). Da $Q(\alpha_k) = 0$, ist

$$Q(z) = (z - \alpha_k) P(z)$$

mit einer Polynomfunktion $P \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ vom Grad $\deg(P) = \deg(Q) - 1 < \deg(q) - 1 = N - 1$. Also ist (173) äquivalent zu

$$\frac{P(z)}{(z - \alpha_1)^{n'_1} \cdots (z - \alpha_k)^{n'_k}} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n'_j} \frac{A_{j,\nu}}{(z - \alpha_j)^\nu} \tag{174}$$

mit $n'_1 + \cdots + n'_k = N - 1$ und per Induktionsvoraussetzung gibt es eindeutig bestimmte $A_{j,\nu}$ mit $j \in \{1, \dots, k\}$ und $\nu \in \{1, \dots, n'_j\}$ derart, dass (174) für alle $z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ erfüllt ist. $\square$

Beweis von Satz 3.3. Der Beweis ist per Induktion nach $M := \sum_{j=1}^{\ell} m_j$. Ist $M = 0$, so ist $\ell = 0$; das Nennerpolynom q zerfällt dann über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, so dass die Schlussfolgerung von Satz 3.3 ein Spezialfall von Satz B.1 ist. Ist $M \geq 1$, so gibt es nach Theorem B.1 und Lemma A.1(i) eindeutige komplexe Zahlen $A_{j,\nu}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ und $\nu \in \{1, \dots, n_j\}$ sowie $a_{j,\nu}$ und $b_{j,\nu}$ für $j \in \{1, \dots, \ell\}$ und $\nu \in \{1, \dots, m_j\}$ derart, dass

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(x - \alpha_j)^{\nu}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{m_j} \left(\frac{a_{j,\nu}}{(x - \lambda_j)^{\nu}} + \frac{b_{j,\nu}}{(x - \overline{\lambda_j})^{\nu}} \right) \quad (175)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Da $f(x)$ reell ist, liefert komplexes Konjugieren

$$f(x) = \overline{f(x)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{\overline{A_{j,\nu}}}{(x - \alpha_j)^{\nu}} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\nu=1}^{m_j} \left(\frac{\overline{a_{j,\nu}}}{(x - \overline{\lambda_j})^{\nu}} + \frac{\overline{b_{j,\nu}}}{(x - \lambda_j)^{\nu}} \right) \quad (176)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Die rechten Seiten von (175) und (176) stimmen dann auch für alle $x \in \mathbb{C}$ außerhalb $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \cup \{\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell}\}$ überein, nach Lemma A.1(i). Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten in Satz B.1 ist also $\overline{A_{j,\nu}} = A_{j,\nu}$ und $\overline{a_{j,\nu}} = b_{j,\nu}$ für alle Indizes, somit $A_{j,\nu} \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} \frac{a_{j,\nu}}{(x - \lambda_j)^{\nu}} + \frac{b_{j,\nu}}{(x - \overline{\lambda_j})^{\nu}} &= \frac{a_{j,\nu}}{(x - \lambda_j)^{\nu}} + \overline{\left(\frac{a_{j,\nu}}{(x - \lambda_j)^{\nu}} \right)} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{a_{j,\nu}}{(x - \lambda_j)^{\nu}} \right) \\ &= 2 \, \frac{\operatorname{Re}(a_{j,\nu}(x - \overline{\lambda_j})^{\nu})}{(x - \lambda_j)^{\nu} (x - \overline{\lambda_j})^{\nu}} = 2 \, \frac{\operatorname{Re}(a_{j,\nu}(x - \overline{\lambda_j})^{\nu})}{(p_{\lambda_j}(x))^{\nu}}. \end{aligned}$$

Der Nenner des letzten Terms ist ein reelles Polynom vom Grad 2ν, der Zähler ein reelles Polynom vom Grad $\leq \nu$ (somit $< 2\nu$). Für $j = \ell$ und $\nu = m_\ell$ führen wir eine Polynomdivision durch:

$$2 \operatorname{Re}(a_{\ell,m_\ell}(x - \overline{\lambda_\ell})^{m_\ell}) = p_{\lambda_\ell}(x) P(x) + r(x)$$

mit einem Polynom $r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 1 und einer Polynomfunktion $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leq m_\ell - 2$. Dann ist also $r(x) = B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell} x$ mit geeigneten $B_{\ell,m_\ell}, C_{\ell,m_\ell} \in \mathbb{R}$ und

$$\frac{a_{\ell,m_\ell}}{(x - \lambda_\ell)^{m_\ell}} + \frac{b_{\ell,m_\ell}}{(x - \overline{\lambda_\ell})^{m_\ell}} = \frac{B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell} x}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell}} + \frac{P(x)}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell - 1}}.$$

Sei $q_1(x) := \prod_{j=1}^{k}(x-\alpha_j)^{n_j} \prod_{j=1}^{\ell}(p_{\lambda_j}(x))^{m'_j}$ mit $m'_j := m_j$ für $j \in \{1, \ldots, \ell-1\}$ und $m'_\ell := m_\ell - 1$. Dann ist

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell}x}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell}} = \frac{P(x)}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell-1}} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{\overline{A_{j,\nu}}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{m'_j} 2\,\frac{\mathrm{Re}(a_{j,\nu}(x-\overline{\lambda_j})^\nu)}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu} \tag{177}$$

Also gilt

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{B_{\ell,m_\ell} + C_{\ell,m_\ell}x}{(p_{\lambda_\ell}(x))^{m_\ell}} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \tag{178}$$

mit einem Polynom $p_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\deg(p_1) < \deg(q_1)$ (das wir erhalten, indem wir die rechte Seite von (177) auf den Hauptnenner $q_1(x)$ bringen). Per Induktion ist nun

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{A_{j,\nu}}{(x-\alpha_j)^\nu} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\nu=1}^{m'_j} \frac{B_{j,\nu} + C_{j,\nu}x}{(p_{\lambda_j}(x))^\nu}$$

mit geeigneten reellen Zahlen $A_{j,\nu}$, $B_{j,\nu}$ und $C_{j,\nu}$. Setzen wir dies in (178) ein und lösen nach $p(x)/q(x)$ auf, so ergibt sich (31). $\square$

C Wiederholung: Metrische Räume, Stetigkeit

Wir wiederholen Begriffe, die in der Analysis 1 von Prof. Glöckner bereits eingeführt wurden (metrische Räume, Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen, Stetigkeit, Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Vollständigkeit).

Eine Metrik ordnet zwei Elementen x, y einer Menge X eine reelle Zahl $d(x, y) \geq 0$ zu, die wir dann auch den *Abstand von* x *und* y nennen.

Definition C.1 Gegeben eine Menge X nennen wir eine Funktion

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

eine *Metrik auf* X, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(a) (Definitheit) Für $x, y \in X$ gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn $x = y$.

(b) (Symmetrie) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(y, x) = d(x, y)$.

(c) (Dreiecksungleichung) Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Ist d eine Metrik auf X, so nennen wir das Paar (X, d) einen *metrischen Raum.*

Beispiel C.2 Jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[, \;\; d(x, y) := |x - y|;$$

ebenso für Teilmengen $X \subseteq \mathbb{C}$.

[Es gilt nämlich $0 = d(x, y) = |x - y|$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also $x = y$. Weiter ist

$$d(y, x) = |y - x| = |(-1) \cdot (x - y)| = |-1| \cdot |x - y| = |x - y| = d(x, y)$$

und

$$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

für alle $x, y, z \in X$.]

In jedem metrischen Raum können wir von Umgebungen eines Punkts, offenen Mengen sowie abgeschlossenen Mengen reden.

Definition C.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Gegeben $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ nennen wir[42]

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}$$

die *offene Kugel* vom Radius ε um x und

$$\overline{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

die *abgeschlossene Kugel* vom Radius ε um x. Wir schreiben auch $B_\varepsilon^X(x)$ oder $B_\varepsilon^d(x)$ statt $B_\varepsilon(x)$, falls es nötig ist, auf den zugrunde liegenden metrischen Raum oder die benutzte Metrik hinzuweisen. Entsprechend schreiben wir auch $\overline{B}_\varepsilon^X(x)$ oder $\overline{B}_\varepsilon^d(x)$ statt $\overline{B}_\varepsilon(x)$.

(b) Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *Umgebung* eines Punkts $x \in X$, wenn sie eine Kugel um x enthält, also

$$(\exists \varepsilon > 0) \;\; B_\varepsilon(x) \subseteq V.$$

(c) Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt *offen*, wenn sie eine Umgebung von jedem $x \in V$ ist, also

$$(\forall x \in V)(\exists \varepsilon > 0) \;\; B_\varepsilon(x) \subseteq V.$$

(d) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel C.4 (a) In $\mathbb{R}$ ist $B_\varepsilon(x) = \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

(b) In $\mathbb{C}$ ist für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ wegen $d(z, a + ib) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$

$$B_\varepsilon(z) = \{a + ib \colon a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } d(z, a + ib) < \varepsilon\}$$

die Kreisscheibe aller $a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a - x)^2 + (b - y)^2 < \varepsilon^2$.

[42] Der Buchstabe “B” erinnert an das englische Wort *ball*.

Bemerkung C.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Jede Kugel $B_\varepsilon(x)$ ist offen, denn für alle $y \in B_\varepsilon(x)$ ist $d(x,y) < \varepsilon$ und somit $r := \varepsilon - d(x,y) > 0$. Dann ist $B_r(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$, da wegen der Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r = d(x,y) + \varepsilon - d(x,y) = \varepsilon$$

für alle $z \in B_r(y)$.

(b) Jede Kugel $\overline{B}_\varepsilon(x)$ ist abgeschlossen, denn ist $y \in X \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$, so ist $d(x,y) > \varepsilon$ und somit $r := d(x,y) - \varepsilon > 0$. Dann ist $B_r(y) \subseteq X \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$, denn für alle $z \in B_r(y)$ folgt aus

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + r = d(x,z) + d(x,y) - \varepsilon,$$

dass $d(x,z) > \varepsilon$.

Bemerkung C.6 Sei (X, d) wie zuvor und $x \in X$.

(a) $B_\varepsilon(x)$ heißt auch (offene) *ε-Umgebung* von x in X und manche benutzen die Notation $U_\varepsilon(x)$ statt $B_\varepsilon(x)$.

(b) Ist V eine Umgebung von x in X, so auch jede Teilmenge $W \subseteq X$ mit $V \subseteq W$.

Kennen wir die offenen Mengen, so können wir übrigens auch die x-Umgebungen wieder rekonstruieren:

(c) Eine offene Teilmenge $V \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn $x \in V$.

(d) Eine Teilmenge $W \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn sie eine offene Umgebung von x enthält.

Satz C.7 *Für jeden metrischen Raum (X, d) gilt:*

(O1) *Die leere Menge $\emptyset$ ist offen in X und X ist offen.*

(O2) *Für jede Familie $(V_j)_{j \in J}$ von offenen Teilmengen $V_j \subseteq X$ ist auch die Vereinigung $\bigcup_{j \in J} V_j$ offen.*

(O3) *Für alle offenen Teilmengen V_1 und V_2 von X ist auch der Durchschnitt $V_1 \cap V_2$ offen in X.*

Beweis. (O1) Gegeben $x \in X$ ist $B_1(x) \subseteq X$, also X offen. Wäre $\emptyset$ nicht offen, so gäbe es ein $x \in \emptyset$ (Widerspruch!) derart, dass $B_\varepsilon(x) \not\subseteq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$.

(O2) Ist $x \in \bigcup_{j \in J} V_j =: V$, so gibt es ein $j \in J$ mit $x \in V_j$. Da V_j offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V_j$. Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Also ist V offen.

(O3) Sei $x \in V_1 \cap V_2$. Für $j \in \{1, 2\}$ gibt es $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(x) \subseteq V_j$, da V_j offen ist. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist nun $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V_1 \cap V_2$. □

Definition C.8 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_n \in X$. Wir sagen, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen ein $x \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\; d(x, x_n) < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wir werden gleich sehen, dass x eindeutig festgelegt ist; wir nennen x den *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und schreiben

$$\lim_{n \to \infty} x_n := x.$$

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent*, wenn sie gegen ein $x \in X$ konvergiert; anderenfalls heißt sie *divergent*.

Lemma C.9 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$, so ist $x = y$.*

Beweis. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ für all $n \geq N$. Weiter existiert ein $M \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, y) < \varepsilon$ für alle $n \geq M$. Sei $n := \max\{N, M\}$. Dann ist

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\varepsilon.$$

Also gilt $d(x, y) < 2\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und somit $d(x, y) = 0$, folglich $x = y$. □

Lemma C.10 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Gegeben $x \in X$ sind äquivalent:*

(a) *Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, also* $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$ $d(x, x_n) < \varepsilon$.

(b) *Für jede Umgebung W von x existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in W$ für all $n \geq N$.*

Beweis. (a)⇒(b): Ist $W \subseteq X$ eine Umgebung von x, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq W$. Nach (a) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x, x_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $x_n \in B_\varepsilon(x) \subseteq W$.

(b)⇒(a): Gegeben $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x. Also existiert nach (b) ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in B_\varepsilon(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und somit $d(x, x_n) < \varepsilon$. □

Satz C.11 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in A$$

für jede in X konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A.

Beweis. Sei A abgeschlossen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $a_n \in A$, welche in X gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wäre $x \notin A$, so wäre $W := X \setminus A$ eine offene Menge mit $x \in W$, also eine Umgebung von x. Nach Lemma C.10(b) gäbe es also ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \in W$ für alle $n \geq N$. Insbesondere wäre $a_N \in W = X \setminus A$, im Widerspruch zu $a_N \in A$. Also muss doch $x \in A$ sein.

Sei nun A nicht abgeschlossen, also $X \setminus A$ nicht offen. Es gibt also ein $x \in X \setminus A$ derart, dass

$$(\forall \varepsilon > 0)\; B_\varepsilon(x) \not\subseteq X \setminus A,$$

also $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Da wir $\varepsilon = 1/n$ wählen können, sehen wir: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $a_n \in B_{1/n}(x) \cap A$. Wegen $d(x, a_n) < 1/n \to 0$ gilt dann $a_n \to x$, wobei $x \notin A$. □

Definition C.12 Seien metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) gegeben sowie eine Funktion $f\colon X \to Y$. Wir nennen f *stetig an einer Stelle* $x \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)\;\; d_X(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon, \qquad (179)$$

also

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\;\; f(B^X_\delta(x)) \subseteq B^Y_\varepsilon(f(x)). \qquad (180)$$

Ist $f\colon X \to Y$ an jeder Stelle $x \in X$ stetig, so nennen wir die Funktion f *stetig*.

Lemma C.13 *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume und* $x \in X$. *Für eine Funktion* $f\colon X \to Y$ *sind äquivalent:*

(a) f *ist stetig an der Stelle* x;

(b) *Für jede Umgebung* V *von* $f(x)$ *in* Y *ist das Urbild* $f^{-1}(V)$ *eine Umgebung von* x *in* X;

(c) *Für jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* X *mit* $x_n \to x$ *gilt* $f(x_n) \to f(x)$ *für* $n \to \infty$, *also*
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Ist V eine Umgebung von $f(x)$ in Y, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B^Y_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Nach (a) existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B^X_\delta(x)) \subseteq B^Y_\varepsilon(f(x))$. Dann ist $f(B^X_\delta(x)) \subseteq V$, also $B^X_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X.

(b)$\Rightarrow$(a): Gegeben $\varepsilon > 0$ ist $V := B^Y_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y, nach (b) ist also $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit $B^X_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$ und somit $f(B^X_\delta(x)) \subseteq V = B^Y_\varepsilon(f(x))$.

(a)$\Rightarrow$(c): Sei f stetig an der Stelle x und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass
$$(\forall y \in X)\; d_X(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$
Da $x_n \to x$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass
$$d_X(x, x_n) < \delta$$
für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ können wir oben $y := x_n$ nehmen und erhalten $d_Y(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$. Also gilt $f(x_n) \to f(x)$.

$\neg$(a)$\Rightarrow$ $\neg$(c): Ist f unstetig an der Stelle x, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in X$ existiert mit $d_X(x, y) < \delta$ und $d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Für $n \in \mathbb{N}$ wenden wir dies mit $\delta := 1/n$ an und erhalten ein $x_n \in X$ mit $d_X(x, x_n) < 1/n$ und $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Da $d_X(x, x_n) = 1/n \to 0$ für $n \to \infty$, gilt $x_n \to x$. Wegen $d_Y(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x)$. □

Satz C.14 *Seien* (X, d_X) *und* (Y, d_Y) *metrische Räume. Für eine Funktion* $f\colon X \to Y$ *sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig, also stetig an jeder Stelle $x \in X$;*

(b) *Für jede offene Teilmenge V von Y ist das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von X;*

(c) *Für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y ist das Urbild $f^{-1}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X;*

(d) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(\lim_{n\to\infty} x_n)$, es gilt also*

$$f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Beweis. Nach Lemma C.13 sind die Bedingungen (a) und (d) äquivalent.

(a)⇒(b): Sei $V \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(V)$. Da V eine Umgebung von $f(x)$ ist, ist nach Lemma C.13(b) $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x, es gibt also ein $\delta > 0$ mit $B_\delta^X(x) \subseteq f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)⇒(c): Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus A$ eine offene Teilmenge von Y, somit nach (b)

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

eine offene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(c)⇒(b): Ist V eine offene Teilmenge von Y, so ist $Y \setminus V$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y, somit nach (c)

$$f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$$

eine abgeschlossene Teilmenge von X. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

(b)⇒(a): Ist $x \in X$ und $W \subseteq Y$ eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es eine offene Umgebung V von $f(x)$ in Y mit $V \subseteq W$. Nach (b) ist $f^{-1}(V)$ offen. Da $x \in f^{-1}(V)$, ist $f^{-1}(V)$ eine offene x-Umgebung und somit auch $f^{-1}(W) \supseteq f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X. Nach Lemma C.13(b) ist f also an der Stelle x stetig. □

Insbesondere ist also ε-δ-Stetigkeit von f (wie in Bedingung (a) des vorigen Lemmas) äquivalent zu Folgenstetigkeit von f (wie in Bedingung (d)).

Satz C.15 *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$ sowie $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Ist f stetig an der Stelle x und g stetig an der Stelle $f(x)$, so ist die Komposition*

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad y \mapsto g(f(y))$$

stetig an der Stelle x.

Beweis. Ist V eine Umgebung von $g(f(x))$ in Z, so $g^{-1}(V)$ eine Umgebung von $f(x)$ in Y, da g an der Stelle $f(x)$ stetig ist. Somit ist $f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine Umgebung von x in X, da f an der Stelle x stetig ist. Somit ist $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine Umgebung von x in X, also $g \circ f$ stetig an der Stelle x. □

Satz C.16 *Seien (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ Funktionen, die an der Stelle x stetig sind.*

(a) *Dann sind auch $fg\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y)g(y)$ sowie $f + g\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y) + g(y)$ stetig an der Stelle x. Ist $g(X) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist weiter die Funktion $1/g\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 1/g(y)$ stetig an der Stelle x.*

(b) *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \alpha f(y) + \beta g(y)$ stetig an der Stelle x.*

Beweis. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x$, so gilt unter den genannten Voraussetzungen

$$f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(y), \quad f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x), \quad 1/g(x_n) \to 1/g(x)$$

und $\alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(x) + \beta g(x)$ für $n \to \infty$, nach dem Grenzwertsatz für Folgen der Analysis 1. □

Definition C.17 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge X. Eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit natürlichen Zahlen

$$n_1 < n_2 < \cdots .$$

Lemma C.18 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X, mit Grenzwert x. Dann konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x. Allgemeiner gilt*

$$x_{\theta(k)} \to x \text{ für } k \to \infty$$

für jede Funktion $\theta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $\theta^{-1}(\{1, \ldots, m\})$ endlich ist für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind ein Spezialfall von Folgen der Form $(x_{\theta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ (im Fall einer Teilfolge ist $\theta\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ streng monoton wachsend). Es genügt daher, die letzte Aussage zu beweisen. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d(x, x_n) < \varepsilon \ \text{ für alle } n \geq N. \tag{181}$$

Da das Urbild

$$F := \theta^{-1}(\{1, \ldots, N-1\})$$

per Voraussetzung eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_0 > k$ für alle $k \in F$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ ist dann $\theta(k) \in \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N-1\}$, also $\theta(k) \geq N$, somit $d(x, x_{\theta(k)}) < \varepsilon$ nach (181).
□

Definition C.19 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X wird *Cauchyfolge* genannt, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N)\ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ist in X jede Cauchyfolge eine konvergente Folge, so nennt man den metrischen Raum (X, d) *vollständig*.

Beispiel C.20 Wir haben in Analysis 1 gesehen, dass in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ jede Cauchyfolge konvergiert; mit $d(x, y) := |x-y|$ ist also $(\mathbb{R}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum (ebenso $(\mathbb{C}, d)$).

Lemma C.21 *Für jeden metrischen Raum (X, d) gilt: Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei x der Grenzwert der konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x, x_n) < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Somit gilt für alle $n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. □

Ein metrischer Raum (X, d) ist somit genau dann vollständig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Lemma C.22 *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Die gleiche Schlussfolgerung gilt, wenn $(x_{\theta(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert für eine Funktion $\theta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie in Lemma* C.18.

Beweis. Sei

$$x := \lim_{k\to\infty} x_{\theta(k)}.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$. Da $\theta^{-1}(\{1, \ldots, N-1\})$ endlich ist, finden wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_0 > k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $\theta(k) \leq N - 1$. Somit ist $\theta(k) \geq N$ für alle $k \geq k_0$ und folglich

$$d(x_n, x_{\theta(k)}) < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und $k \geq k_0$. Für festes $n \geq N$ folgt

$$d(x_n, x) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_{\theta(k)}) \leq \varepsilon,$$

da $d(x_n, \cdot)\colon X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(x_n, y)$ stetig ist (wie wir gleich in Beispiel C.28 nachrechnen). Also gilt $x_n \to x$ für $n \to \infty$. □

Definition C.23 Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d). Ein Element $x \in X$ wird ein *Häufungspunkt* der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}\colon d(x, x_n) < \varepsilon\}$$

eine unendliche Menge ist, also

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geq N)\colon d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Lemma C.24 *Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

(b) *x ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. (a)⇒(b): Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Teilfolge. Gegeben $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Da $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N$ und $k \geq k_0$, also $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$.

(b)⇒(a): Sei $n_0 := 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $n_1 < \cdots < n_{k-1}$ bereits gefunden derart, dass

$$d(x, x_{n_j}) < \frac{1}{j}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Da die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \colon d(x, x_n) < 1/k\}$$

unendlich ist, existiert ein $n_k > n_{k-1}$ mit $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$. Die Konstruktion liefert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $x_{n_k} \to x$. □

Spezielle stetige Abbildungen

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so ist eine Abbildung $f \colon X \to Y$ per Definition stetig, wenn sie an jeder Stelle $x \in X$ stetig ist, also

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)\, d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{182}$$

Wir erinnern an zwei stärkere Stetigkeitseigenschaften, die manchmal von Nutzen sind.

Definition C.25 Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

(a) Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(\forall y \in X)\, d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{183}$$

(b) Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in [0, \infty[$ derart gibt, dass

$$(\forall x, y \in X)\ \ d_Y(f(x), f(y)) \ \leq\ L\, d_X(x, y).$$

Man nennt solch ein L eine *Lipschitz-Konstante* für f.

Satz C.26 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist f Lipschitz-stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

(b) *Ist f gleichmäßig stetig, so ist f stetig.*

Insbesondere ist jede Lipschitz-stetige Abbildung stetig.

Beweis. Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und $\varepsilon > 0$, so setze

$$\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}.$$

Dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$, dass

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x, y) \leq (L+1) d_X(x, y) < (L+1)\delta = \varepsilon;$$

also ist f gleichmäßig stetig.

Ist f gleichmäßig stetig und $x_0 \in X$, so existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ folgt, dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Insbesondere gilt für alle $y \in X$ mit $d_X(x_0, y) < \delta$, dass $d_Y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$. Also ist f an der Stelle x_0 stetig und somit stetig, da x_0 beliebig war. □

Bemerkung C.27 Man beachte, dass in (182) und (183) lediglich die Reihenfolge der Quantoren verschieden ist. Die Bedingung (183) ist stärker, da hier δ sogar unabhängig von x gewählt werden kann.

Beispiel C.28 Für jeden metrischen Raum (X, d) und jedes $x \in X$ gilt

$$(\forall y, z \in X) \;\; |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z), \tag{184}$$

woran wir gleich noch einmal erinnern. Also ist die Abbildung

$$d(x, \cdot)\colon Y \to [0, \infty[, \;\; y \mapsto d(x, y)$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ (insbesondere stetig).

[In der Tat ist $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, somit

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z).$$

Vertauschen der Rollen von y und z zeigt, dass auch

$$-(d(x, y) - d(x, z)) = d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Also ist $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.]

Beispiel C.29 Die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x$$

ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Sei nämlich $\varepsilon := 1$. Für $\delta > 0$ setzen wir $x_n := n$ und $y_n := n + \frac{\delta}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|y_n - x_n| = \delta/2 < \delta$ aber

$$|e^{y_n} - e^{x_n}| = e^n(e^{\delta/2} - 1) \to \infty$$

für $n \to \infty$, somit $|e^{y_n} - e^{x_n}| > 1 = \varepsilon$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel C.30 Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

[Da $|f(y) - f(0)|/|y - 0| = 1/\sqrt{y} \to \infty$ für $y \searrow 0$, kann f nicht Lipschitz-stetig sein.[43]

Die gleichmäßige Stetigkeit von f ist klar aus Satz IV.1.28 der Analysis 1.

Weitere Grundbegriffe zu metrischen Räumen

Im vorliegenden Analysis 2-Skript werden Sie weitere Grundbegriffe im Bereich der metrischen Räume kennenlernen. So begegnen uns der Begriff der induzierten Metrik auf einer Teilmenge M eines metrischen Raums X; die Produktmetrik auf einem Produkt $X_1 \times X_2$ metrischer Räume und der Begriff eines präkompakten (total beschränkten) metrischen Raums. Zum anderen werden uns Begriffe begegnen, die nicht nur für metrische Räume, sondern allgemeiner für sogenannte topologische Räume X und ihre Teilmengen definiert werden können (wie Abschluss, Inneres und Rand einer Teilmenge $M \subseteq X$; Begriff der Kompaktheit). Jenseits der Analysis 2 kommen noch weitere wichtige Sätze über metrische Räume hinzu, etwa der Bairesche Kategoriensatz und der Satz von Arzelà-Ascoli.

[43] Für eine Lipschitz-Konstante L wäre nämlich stets $|f(y) - f(0)| \leq L|y - 0|$, also $|f(y) - f(0)|/|y - 0| \leq L$.