

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Hyperbolischer Sinus und Cosinus)

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

- (a) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$
- (b) $\sinh(x + y) = \cosh(x) \sinh(y) + \sinh(x) \cosh(y)$
- (c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

Aufgabe G2 (Grenzwerte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x)}{e^x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{e^x}.$

Aufgabe G3 (Ableitungen von cosh, sinh und tanh)

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Zeigen Sie

- (a) $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- (b) $\sinh'(x) = \cosh'(x)$
- (c) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hausübungen

Aufgabe H1 (n -te Wurzeln aus komplexen Zahlen; 5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in \mathbb{C} besitzt. Diese sind gegeben durch

$$\left\{ e^{\frac{k}{n}2\pi i} : k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Zeigen Sie nun, dass es für $w = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ genau n verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = w$ in \mathbb{C} gibt und diese durch

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{k}{n}2\pi i} : k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

gegeben sind.

Aufgabe H2 (Die Umkehrfunktionen; 5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ streng monoton wachsend und bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\operatorname{artanh} := \tanh^{-1}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}.$$

- (b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe H3 (Grenzwerte; 5 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

- (a) $\lim_{x \nearrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}}$
(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Modalitäten: Bitte geben Sie ihre Lösungen zu den Übungszetteln in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.

Zur Vorlesung Analysis II wird es für die Bachelor-Mathematik-Studenten eine Klausur geben. Wenn Sie die Klausur **bestehen** und mehr als 50% der Punkte in den Übungsaufgaben erreicht haben, erhalten Sie einen Bonus von einem Notenschritt (z.B. von 4,0 auf 3,7). Der Bonus hilft also nicht beim Bestehen der Klausur. Sollten Sie über 80% der Punkte aus den Übungsaufgaben erreicht haben, so bekommen Sie einen weiteren Notenschritt (also z.B. von 4,0 auf 3,3).

Die Lehramtsstudenten müssen eine mündliche Prüfung absolvieren. Bei dieser gibt es keinen Bonus aus den Übungszetteln. Trotzdem ist es ratsam die Übungsaufgaben als Vorbereitung auf die Prüfung zu bearbeiten.