Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
18.04.2014

2. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G4 (Ein Integral von Hand)

Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Zeigen Sie

$$\int_0^{1^*} f = \int_{0_*}^1 f$$

ohne zu verwenden, dass f Riemann-integrierbar ist. Folgern Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und geben Sie $\int_0^1 f$ an ohne den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu benutzen.

Aufgabe G5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) $\min f([a,b]) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f([a,b]) \cdot (b-a)$.

(b) Es existiert ein $\zeta \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta) \cdot (b-a).$$

Aufgabe G6 (Das Integral einer positiven Funktion)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zudem gebe es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) \neq 0$. Zeigen Sie $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Hausübungen

Aufgabe H4 (Der Sinus-Minus; 5 Punkte)

Berechnen und skizzieren Sie $\sin_-\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe H5 (Riemann-Integrierbarkeit I; 5 Punkte)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist Riemann-integrierbar.

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \varphi, \psi \in T_a^b)\ \varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon$.

Aufgabe H6 (Riemann-Integrierbarkeit II; 5 Punkte)

Seien $a < b$.

(a) Für $x \in [a, b]$ ist die Abbildung

$$1_{\{x\}} \colon [a, b] \to \mathbb{R},\ y \mapsto \begin{cases} 1 & : y = x \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar.

(b) Eine Funktion $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ gibt, sodass $f|_{]t_j, t_{j+1}[}$ für $j = 0, \ldots, n-1$ stetig ist. Zeigen Sie, dass jede beschränkte und stückweise stetige Funktion auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist.