Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
02.05.2014

4. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G10 (Intergrale rationaler Funktionen)
Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, mit $p^2 - 4q < 0$. Zeigen Sie

(a)

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + const.$$

(b)

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \ln(|x^2 + px + q|) + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \cdot \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx + const.$$

Aufgabe G11 (Partialbruchzerlegung)
Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a) } \int_4^5 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \qquad \text{(b) } \int \frac{13x + 14}{x^3 + x^2 - 2x + 12}.$$

Aufgabe G12 (Taylor-Formel)
Finden Sie ein Polynom dritten Grades, dass den Tangens auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}]$ mit einem Fehler kleiner $0,003$ approximiert.
Hinweis: Es gilt $\tan(\frac{\pi}{16}) \leq \frac{1}{5}$.

Hausübungen

Aufgabe H10 (Intergrale rationaler Funktionen II; 5 Punkte)
Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, mit $p^2 - 4q < 0$ und $k \geq 2$. Zeigen Sie

(a)

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{2x + p}{(k-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q - p^2)} \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^{k-1}} dx + const.$$

(b)

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}dx = -\frac{a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + (b-\frac{ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx + const.$$

Aufgabe H11 (Partialbruchzerlegung II; 5 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx.$$

Hinweis: Substitution mit tan oder arctan.

Aufgabe H12 (Taylor-Formel II; 5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f\colon]-1,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1+x}$ zum Entwicklungspunkt 0 und zeigen Sie, dass die Funktion f auf $]-1,1[$ durch ihre Taylorreihe gegeben ist.

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ gerade, $a < b$ reelle Zahlen, $x \in]a,b[$ und $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine C^n-Fuktion mit

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x) \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass x eine Extremstelle von f ist.