Prof. Dr. Helge Glöckner — Sommersemester 2014

09.05.2014

5. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G13 (Uneigentliche Integrale)

Bestimmen Sie welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (b) $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$ (c) $\int_0^\infty \frac{x-1}{x+1}dx$ (d) $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$

Aufgabe G14 (Ein paar stetige Funktionen)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Abbildungen

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen f_n stetig sind.

Aufgabe G15 (Differenzierbarkeit)

Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ eine C^1-Abbildung. Zudem sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass f eine C^1-Abbildung ist und $f' = g$ gilt.

Hausübungen

Aufgabe H13 (Ein uneigentliches Integral; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx$.

(a) Zeigen Sie mit dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert.

(b) Folgern Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ existiert.

Aufgabe H14 (Eine glatte Funktion; 5 Punkte)

Sei $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} p\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion f eine C^k-Abbildung ist und es eine Polynomfunktion $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} q\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist also die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0. \end{cases}$$

eine C^∞-Abbildung.

Aufgabe H15 (Das zweiseitige uneigentliche Integral; 5 Punkte)

Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass f für alle $\alpha < \beta \in]a,b[$ über $]\alpha,\beta[$ Riemann-integrierbar ist. Man wählt ein $\theta \in]a,b[$ und definiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ als

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^\theta f(t)dt + \int_\theta^b f(t)dt,$$

wenn beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren. Zeigen Sie, dass die Existenz und der Wert des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(t)dt$ unabhängig von der Wahl von θ ist.