Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014

16.05.2014

6. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G16 (Punktweise vs. gleichmäßige Konvergenz)

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}\ x \mapsto \begin{cases} 2\cdot(x-n) & : x\in[n,n+\frac{1}{2}] \\ 1-2\cdot(x-(n+\frac{1}{2})) & : x\in[n+\frac{1}{2},n+1] \\ 0 & : \text{ sonst }. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie f_n. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion? Wenn ja, gegen welche?

(b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

Wir betrachten die Funktionen Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$g_n\colon [0,1]\to \mathbb{R}\ x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & : x\in[0,\frac{1}{2n}] \\ n-2n^2(x-\frac{1}{2n}) & : x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}] \\ 0 & : \text{ sonst }. \end{cases}$$

(c) Skizzieren Sie g_n. Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

(d) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n \neq 0$.

(e) Folgern Sie aus (d), dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe G17 (Funktionenreihen)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ stetig ist.

Aufgabe G18 (Gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit)

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Hausübungen

Aufgabe H16 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $f_n\colon [1,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$ und $g_n\colon [1,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

(a) Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise? Wenn ja, gegen welche Funktion?
(b) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auch gleichmäßig?
(c) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig? Wenn ja, gegen welche Funktion?

Aufgabe H17 (Gleichmäßige Konvergenz I; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Seien zudem $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f_n([0,1]) \subseteq [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\varphi \circ f$ konvergiert.

Hinweis: φ ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe H18 (Gleichmäßige Konvergenz II; 5 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Zudem sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ die gegen ein $t \in [0,1]$ konvergiert. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n(t_n) = f(t)$.