Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
23.05.2014

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G19 (Potenzreihen)

(a) Wir definieren $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Zeigen Sie durch gliedweises Ableiten von f, dass $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Seien $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{n_k}$ genau dann, wenn die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ mit

$$b_n = \begin{cases} a_k & : n = n_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

konvergiert. Sei R Konvergenzradius der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_k}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon]-R,R[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{n_k}$$

differenzierbar ist und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_{n_k} x^{n_k - 1}$ für $x \in]-R,R[$ gilt.

(c) Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

Zeigen Sie $f'(x) = e^{x^2}$.

Aufgabe G20 (Eine weitere Norm auf $\mathbb{R}^n$)

Zeigen Sie, dass $\|\bullet\|_1\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[, x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe G21 (Der Rand von $\mathbb{Q}$)

Sei $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik.

(a) Zeigen Sie, dass für X gilt $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ zeigen Sie $[a, b]^\circ =]a, b[$ und $\overline{[a, b[} = [a, b]$.

Hausübungen

Aufgabe H19 (Abschluss, Inneres, Rand; 5 Punkte)

Seien A und B Teilmengen eines metrischen Raumes X. Zeigen Sie

$$\text{(a) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{(b) } (A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B} \qquad \text{(c) } X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$$

$$\text{(d) } \partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B.$$

Finden Sie zudem ein Beispiel für das $\partial(A \cup B) \subsetneqq \partial A \cup \partial B$ gilt.

Aufgabe H20 (Norm auf dem Produkt; 5 Punkte)

Seien $(E, \|\bullet\|_E)$ und $(F, \|\bullet\|_F)$ normierte Räume. Für $x \in E$ und $y \in F$ definieren wir

$$\|(x, y)\| := \max \{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\bullet\|$ eine Norm auf $E \times F$ ist.

Aufgabe H21 (Die Cantor-Menge; 5 Punkte)

Seien $C_0 := [0, 1]$, $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] = \frac{1}{3}C_0 \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_0)$ und rekursiv

$$C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right).$$

Die Menge C_n besteht also aus 2^n disjunkten Intervallen der Länge $\frac{1}{3^n}$. Man nennt $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ die Cantor-Menge.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \{0, 2\}$ definieren wir die Intervalle

$$I_{(0,a_1,\ldots,a_n)} := \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}\right].$$

(a) Zeichnen Sie $I_{0,0}$ und $I_{0,2}$ sowie $I_{0,0,0}$, $I_{0,0,2}$, $I_{0,2,0}$ und $I_{0,2,2}$.
(b) Zeigen Sie $I_{0,a_1,\ldots,a_n} \supseteq I_{0,a_1,\ldots,a_{n+1}}$ für alle $a_1, \ldots a_{n+1} \in \{0, 2\}$.
(c) Zeigen Sie

$$C_n = \bigcup_{a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}} I_{(0,a_1,\ldots,a_n)}$$

für $n \in \mathbb{N}$.
(d) Folgern Sie $C = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\}\right\}$.