Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
30.05.2014

8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G22 (Das Innere und der Rand von Kugeln)

(a) Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass M genau dann abgeschlossen ist, wenn $M = \overline{M}$. Zeigen Sie zudem, dass M genau dann offen ist, wenn $M = M^\circ$.

(b) Sei $(E, \|\bullet\|)$ ein normierter Raum, zeigen Sie $\overline{B}_r(0)^\circ = B_r(0)$ und $\partial B_r(0) = \partial \overline{B}_r(0) = \{x \in E : \|x\| = r\}$.

Aufgabe G23 (Stetige Fortsetzung)

(a) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto e^y \cdot \sin(x)$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $g\colon (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(|x|)}{\|(x,y)\|_1}$ stetig ist.

(c) Gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$g_\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(|x|)}{\|(x,y)\|_1} : & (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda : & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist?

Aufgabe G24 (Abgeschlossenheit und Vollständigkeit)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, sodass der metrische Raum $(A, d|_{A\times A})$ vollständig ist. Zeigen Sie, dass A eine abgeschlossene Teilmenge in X ist.

Hausübungen

Aufgabe H22 (Stetige Fortsetzung II; 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt, d.h. finden Sie eine stetige Funktion $\hat{h}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\hat{h}(x) = h(x)$ für alle $x \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$ zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt.

Aufgabe H23 (Produkttopologie; 5 Punkte)

Seien $(E, \|\bullet\|_E)$ und $(F, \|\bullet\|_F)$ normierte Räume. In H 20 haben wir gesehen, dass

$$E \times F \to [0, \infty[, \ (x, y) \mapsto \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$$

eine Norm auf $E \times F$ ist. Zeigen sie, dass $E \times F$ ausgestattet mit dieser Norm die Produkttopologie trägt.

Aufgabe H24 (Dichtheit; 5 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $M \subseteq X$ genau dann dicht in X ist, wenn $V \cap M \neq \emptyset$ für jede offene, nicht-leere Teilmenge $V \subseteq X$.