Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014

06.06.2014

# 9. Übungsblatt zur „Analysis II“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G25** (Ein Integraloperator)

Wir statten $C[0,1]$ mit der Supremumsnorm aus und betrachten die Abbildung

$$I\colon C[0,1] \to C[0,1],\ \gamma \mapsto I(\gamma)$$

mit $I(\gamma)(x) = \int_0^x \gamma(t)dt$. Zeigen Sie, dass $I$ stetig linear ist und berechnen Sie $\|I\|_{op}$.

**Aufgabe G26** (Die Punktauswertung)

Wir statten $C[0,1]$ mit der Supremumsnorm aus. Zeigen Sie, dass für jedes $t \in [0,1]$ die Punktauswertung

$$\varepsilon_t\colon C[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto f(t)$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|\varepsilon\|_{op} = 1$ ist.

**Aufgabe G27** (Die richtige Norm auf $C^1[0,1]$)

(a) Wir definieren

$$\|\bullet\|_{C^1}\colon C^1[0,1] \to [0,\infty[,\ \gamma \mapsto \max\left\{\|\gamma\|_\infty, \|\gamma'\|_\infty\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(C^1[0,1], \|\bullet\|_{C^1})$ ein Banachraum ist.
**Hinweis:** Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und ist $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $g$, und konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geichmäßig gegen $f$, dann ist $f$ stetig differenzierbar mit $f' = g$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(C^1[0,1], \|\bullet\|_{C^1}) \to (C[0,1], \|\bullet\|_\infty),\ \gamma \mapsto \gamma'$$

stetig ist.

## Hausübungen

**Aufgabe H25** (Die Operatornorm; 5 Punkte)

(a) Seien $(E, \|\bullet\|_E)$ und $(F, \|\bullet\|_F)$ normierte Räume. Für eine lineare Abbildung haben wir die Operatornorm

$$\|A\|_{op} := \sup\{\|Ax\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, \infty]$$

definiert. Sei $\mathcal{L}(E, F)$ der Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von $E$ nach $F$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(E, F), \|\bullet\|_{op})$ ein normierter Raum ist.

(b) Seien $X, Y$ und $Z$ normierte Räume sowie $B\colon X \to Y$ und $A\colon Y \to Z$ stetig lineare Abbildungen. Zeigen Sie

$$\|A \circ B\|_{op} \leq \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}$$

**Aufgabe H26** (Stetig bilineare Abbildungen; 5 Punkte)

Seien $E_1, E_2$ und $F$ normierte Räume und $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine bilineare Abbildung. Wir definieren

$$\|\beta\|_{op} := \sup\{\|\beta(x, y)\|_F : (x, y) \in E_1 \times E_2 \text{ mit } \|x\|_{E_1}, \|y\|_{E_2} \leq 1\} \in [0, \infty]$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\beta$ ist stetig.
(b) $\beta$ ist stetig in $(0, 0)$.
(c) $\|\beta\|_{op} < \infty$.

**Hinweis:** Zeigen Sie für (c)$\Rightarrow$(a) die Ungleichung $\|\beta(x, y)\| \leq \|\beta\|_{op}\|x\|\|y\|$.

**Aufgabe H27** (Vollständigkeit; 5 Punkte)

Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Ist $M \subseteq X$ eine Menge so definieren wir

$$\operatorname{diam}(M) := \sup\{d(x, y) : x, y \in M\} \in [0, \infty].$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq X$ eine nicht leere abgeschlossene Menge, sodass $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. Zeigen Sie:

(a) $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \;\Rightarrow x = y$.
(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n \in A_n$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.
(c) Schließen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt, sodass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x\}$.