Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
13.06.2014

10. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G28 (Normen auf dem $\mathbb{R}^n$)

Auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir die Normen $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ und $\|\bullet\|_\infty$ eingeführt. Zeigen Sie

(a) $\|\bullet\|_\infty \leq \|\bullet\|_1 \leq n \cdot \|\bullet\|_\infty$
(b) $\|\bullet\|_\infty \leq \|\bullet\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\bullet\|_\infty$.

Aufgabe G29 (Kompakte Intervalle)

(a) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen, Sie: Wenn D kompakt ist, so gilt $D = [a, b]$ für gewisse $a, b \in D$.
(b) Geben Sie eine offene Überdeckung von $]0, 1[$ an, die keine endliche Teilüberdeckung hat.

Aufgabe G30 (Die endliche Durchschnittseigenschaft)

Sei X ein hausdorffscher topologischer Raum. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) X ist kompakt.
(b) Ist $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit $J \neq \emptyset$ und $\bigcap_{j\in F} A_j \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $F \subseteq J$, so ist $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$.

Hausübungen

Aufgabe H28 (Die Abstandsfunktion; 5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Wir definieren die Abbildung

$$d_A\colon X \to [0, \infty[,\ x \mapsto \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

(a) Zeigen Sie, dass d_A Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.
(b) Sei nun A abgeschlossen. Zeigen Sie $A = \{x \in X : d_A(x) = 0\}$.

Aufgabe H29 (Kompaktheit und Vollständigkeit; 5 Punkte)

Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass K vollständig ist.

Aufgabe H30 (Distanz einer abgeschlossenen Menge; 5 Punkte)

Sei $\|\bullet\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\|x - y\| : y \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ ein Minimum besitzt.