Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
20.06.2014

11. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Die Bogenlänge)
Seien $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $r > 0$. Wir definieren

$$\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), c \cdot t).$$

Skizzieren Sie γ und berechnen Sie $\gamma'(t)$, $\|\gamma'(t)\|_2$ und $L(\gamma)$.

Aufgabe G32 (Die Zykloide)
Wir definieren

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Die Kurve γ ist die Bahn eines Punktes auf einem Kreis, der auf der x-Achse abrollt. Bestimmen Sie $\gamma'(t)$, $\|\gamma'(t)\|_2$ und $L(\gamma|_{[0,2\pi]})$.
Hinweis: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$.

Aufgabe G33 (Ein Kurvenintegral)
Wir statten den $\mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Norm aus und betrachten die Kurve $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t), t)$ sowie die Funktion

$$f\colon B_2^{\mathbb{R}^3}(0) \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)^2}}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f$.

Hausübungen

Aufgabe H31 (Stetigkeit parameter-abhängiger Integrale; 5 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \mapsto \int_0^1 e^{\alpha x^2}\,dx$ stetig ist.

Aufgabe H32 (Die logarithmische Spirale; 5 Punkte)
Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sowie $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^{ct}\cos(t)e^{ct}\sin(t))$.

(a) Skizzieren Sie γ für $c = \frac{1}{2\pi}$ und $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) Für $a < b$ definieren wir $L_{a,b} := L(\gamma|_{[a,b]})$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

(c) Existiert der Grenzwert $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$? Beweisen Sie ihre Antwort!

Aufgabe H33 (Ein Kurvenintegral längs einer Ellipse; 5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y$. Berechnen Sie $\int_\gamma f$, wobei γ eine Parametrisierung der Ellipse

$$E = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

ist.

Hinweis: Finden Sie zunächst eine solche Parametrisierung.