Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014
27.06.2014

12. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G34 (Partielle Ableitungen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig partiell differenzierbar sind und berechnen Sie ihre partiellen Ableitungen.

(a) $f\colon \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\big\} \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \frac{xy}{z}$
(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$
(c) $h\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \big(x+\sqrt{y}, \sqrt{x}+y\big)$
(d) $i\colon \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto \big(1+\ln(z), x\sqrt{y}+\sqrt{z}\big)$

Aufgabe G35 (Differenzieren unter dem Integralzeichen)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x\cos(x)dx$$

ohne partielle Integration zu verwenden. Nutzen Sie stattdessen $x\cos(x) = \frac{d}{dt}|_{t=1}\sin(tx)$.

Aufgabe G36 (Lokales Maximum)

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $p \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen p ein lokales Maximum von f, wenn es eine p-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $f|_U \leq f(p)$ gilt. Sei nun p ein lokales Minimum von f. Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen von f in p verschwinden.

Hausübungen

Aufgabe H34 (Partielle Ableitungen; 5 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$
(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \big(5x+3y, 4x^2+y^2\big)$
(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x^2+y^2)^5$

Aufgabe H35 (Differenzieren unter dem Integralzeichen; 5 Punkte)

Wir definieren die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
&g\colon \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ (t, \theta) \mapsto e^{t\cos\theta} \cos(t\sin(\theta)),\\
&h\colon \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ (t, \theta) \mapsto e^{t\cos\theta} \sin(t\sin(\theta)) \text{ und}\\
&f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_0^{2\pi} g(t, \theta) d\theta.
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, \theta) = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} h(t, \theta)$$

für $t > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie $f'(t)$ für $t > 0$.

(c) Bestimmen Sie

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\sin(\theta)) d\theta.$$

Aufgabe H36 (Differenzieren unter dem Integralzeichen für uneigentliche Integrale; 5 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung, sodass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt$ für alle $x \in I$ existiert und es eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ gibt mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| < \gamma(t)$$

für alle $x \in I$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F\colon I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt$ stetig partiell differenzierbar ist und

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

gilt.