Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
04.07.2014

13. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G37 (Verallgemeinerter Satz von Schwarz)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Seien zudem σ eine Permutation der Menge $\{1,\ldots,k\}$ und $j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,n\}$. Zeigen Sie

$$D_{j_1}\ldots D_{j_k} f = D_{j_{\sigma(1)}}\ldots D_{j_{\sigma(k)}} f.$$

Aufgabe G38 (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - y^3 + 3axy$ für $a \neq 0$.

Aufgabe G39 (Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit; 5 Punkte)

Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig und partiell differenzierbar, aber in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.

Hausübungen

Aufgabe H37 (Lokale Extrema; 5 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 4x^2 + 3xy + \frac{3y^2}{2}.$$

Aufgabe H38 (Produkt- und Kettelregel; 5 Punkte)

Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix und $\langle \bullet, \bullet \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\langle x, Ax \rangle}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie f'.

Aufgabe H39 (Laplace Operator; 5 Punkte)

Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar definieren wir

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Sei nun auch $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f.$$