Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
11.07.2014

14. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G40 (Richtungsableitungen)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Richtungsableitungen $D_v f_i(p)$ im Punkte $p = (0,0)$ in Richtung $v = (2,1)$.

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto -\frac{x^2+y^2}{4}$

(b) $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (\sin(x), \cos(y))$.

Aufgabe G41 (Satz über die Umkehrfunktion)

Gegeben sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + z \\ 2y^5 - 3z \\ z^3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es eine $(1,1,1)$-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $f(U)$ offen in $\mathbb{R}^3$ und $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie die Ableitung von $(f|_U^{f(U)})^{-1}$ im Punkt $(2,-1,2)$.

Aufgabe G42 (Satz über implizite Funktion)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 + 3x\cos(y) + \sin(z) + z = 0$$

für hinreichend kleine x, y und z lokal nach z aufgelöst werden kann.

Aufgabe G43 (Freiwillige Ferienaufgabe I)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy,$$

auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe G44 (Freiwillige Ferienaufgabe II)

Hat das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2xy + z, 2xz + y)$$

ein Potential? Wenn ja, können Sie dieses angeben?