Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
11.04.2014

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Hyperbolischer Sinus und Cosinus)
Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

(a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
(b) $\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$
(c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

Lösung:

(a) Es gilt $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

$$= \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x}) \cdot (e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x}) \cdot (e^y - e^{-y}) \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x-y} \right) = \cosh(x+y)$$

(b) Analog zu (a)

(c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(x) + \sinh(x))$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x} \right) \cdot \left(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x} \right) = e^{-x} e^x = 1$$

Aufgabe G2 (Grenzwerte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh(x)}{e^x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{e^x}$.

Lösung:

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+(e^{-x})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-(e^{-x})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe G3 (Ableitungen von cosh, sinh und tanh)
Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Zeigen Sie

(a) $\cosh'(x) = \sinh(x)$
(b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$
(c) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) $\cosh'(x) = \frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

(b) $\sinh'(x) = \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

(c) $\tanh'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\cosh(x)} - \frac{\sinh(x)}{(\cosh(x))^2} \cdot \sinh(x)$

$= \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \underset{G1(c)}{=} \frac{1}{\cosh^2(x)}$