Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
18.04.2014

2. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G4 (Ein Integral von Hand)
Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Zeigen Sie

$$\int_0^{*1} f = \int_{*0}^{1} f$$

ohne zu verwenden, dass f Riemann-integrierbar ist. Folgern Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und geben Sie $\int_0^1 f$ an ohne den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu benutzen.

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir $z_k := \frac{k}{n}$.
Wir definieren zudem die Funktionen

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} z_{k+1} & : t \in [z_k, z_{k+1}[\\ 1 & : t = 1 \end{cases}$$

$$\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} z_k & : t \in [z_k, z_{k+1}[\\ 1 & : t = 1. \end{cases}$$

Wir erhalten $\varphi, \psi \in T_a^b$ und $\psi \le f \le \varphi$.
Es gilt also $\int_0^1 \psi \le \int_{*0}^1 f \le \int_0^{*1} f \le \int_0^1 \varphi$ (*)

Wir rechnen $\int_0^1 \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

Zudem gilt $\int_0^1 \psi = \sum_{k=0}^{n-1} z_k (z_{k+1} - z_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$.

Mit (*) sehen wir $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \le \int_{*0}^1 f \le \int_0^{*1} f \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \int_{*0}^1 f = \int_0^{*1} f = \frac{1}{2} \Rightarrow f \in R_a^b$ und $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Aufgabe G5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) $\min f([a,b]) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f([a,b]) \cdot (b-a)$.

(b) Es existiert ein $\zeta \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta) \cdot (b-a).$$

Lösung:

(a) Da f stetig ist existieren $M := \max f([a,b])$ und $m := \min f([a,b])$.

Wir erhalten $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$.

$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$

$\Rightarrow m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$.

(c) Da f stetig ist nimmt es alle Werte zwischen M und m an (ZWS).

Da $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M$ gibt es ein $\gamma \in [a,b]$, so dass $f(\gamma) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$.

Aufgabe G6 (Das Integral einer positiven Funktion)
Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zudem gebe es ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) \neq 0$. Zeigen Sie $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Lösung:

Sei $\varepsilon := f(x)$. Da f stetig ist gibt es $\delta > 0$, sodass $f(t) > \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ und $[x-\delta, x+\delta] \subseteq]a, b[$.

Wir schreiben $\alpha := x - \delta$ und $\beta = x + \delta$ und definieren die Abbildung

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \; t \mapsto \begin{cases} 0 & : t \in [a, \alpha] \cup [\beta, b] \\ \frac{\varepsilon}{2} & : t \in]\alpha, \beta[\end{cases}.$$

Dann gelten $\varphi \in T_a^b$ und $\varphi \leq f$ (f ist positiv).

Da $f \in R_a^b$ erhalten wir

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\beta - \alpha) = \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f.$$