Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
25.04.2014

3. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G7 (Integrale I)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^2 2x + x^3 dx$ (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (c) $\int_{-2}^{-1} \frac{\exp(x)}{1-\exp(x)} dx$ (d) $\int_0^1 x \cdot \cos(x) dx$

(e) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \sqrt{2x+3} dx$ (f) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$ (g) $\int_1^e \ln(x) dx$ (h) $\int_1^e (\ln(x))^2 dx$

Lösung:

(a) $\int_0^2 2x + x^3 dx = \left[x^2 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4 + \frac{16}{4} = 8$

(b) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin]_0^{1/2} = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

(c) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{1-e^x} dx = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t)\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}}$

$= -\ln(1-e^{-1}) + \ln(1-e^{-2})$

(d) $\int_0^1 x \cdot \cos(x) dx = [x\sin(x)]_0^1 - \int_0^1 \sin(x) dx = \sin(1) - [-\cos(x)]_0^1$

$= \sin(1) + \cos(1) - 1.$

(e) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \sqrt{2x+3} dx = \int_4^9 \frac{1}{2}\sqrt{x} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_4^9 = \frac{1}{3}(9^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{19}{3}$

(f) $\int_1^e \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

(g) $\int_1^e \ln(x) dx \underset{\text{subst.}}{=\!=} \int_0^1 \ln(e^x) \cdot e^x dx = \int_0^1 x e^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$= e - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$

(h) Ersetzen wir in (g) e durch ein beliebiges $y > 0$ so erhalten wir $\int \ln(x) dx = \ln(x)x - x + \text{const.}$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln^2(x)\,dx = \left[\ln(x)\cdot(\ln(x)x - x)\right]_1^e$$

$$- \int_1^e \frac{\ln(x)x - x}{x}\,dx$$

$$= - \int_1^e \ln(x) - 1\,dx = (e-1) - \int_1^e \ln(x)\,dx$$

$$= e - 1 - 1 = e - 2$$

Aufgabe G8 (Unbestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \arccos(x)dx$ (b) $\int \arcsin(x)dx$ (c) $\int \tan(x)dx$ (d) $\int \arctan(x)dx$.

Lösung:

(a) Seien $y \in [-1, 1]$ und $z := \arccos(y)$. Es gilt

$$\int_0^y \arccos(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \arccos(\cos(x)) \cdot \sin(x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{z} x \cdot \sin(x)\, dx$$

$$= [x\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{z} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{z} \cos(x)\, dx = zy - [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{z}$$

$$= \arccos(y) \cdot y - \sin(\arccos(y)) + 1$$

$$= \arccos(y) \cdot y - \sqrt{1-y^2} + 1$$

$$\Rightarrow \int \arccos(x)dx = \arccos(x) \cdot x - \sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

(b) Analog zu (a) erhält man

$$\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \text{const.}$$

(c) Sei $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\int_0^y \tan(x)dx = -\int_0^{y} \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))dx = -\int_1^{\cos(y)} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= -[\ln x]_1^{\cos(y)} = -\ln(\cos(y))$$

$$\Rightarrow \int \tan(x)dx = -\ln(\cos(x)) + \text{Const.}$$

(d) Seien $y \in \mathbb{R}$ und $z := \arctan(y)$

$$\int_0^y \arctan(x)dx = \int_0^z \arctan(\tan(x)) \cdot (1+\tan^2(x))\, dx$$

$$= \int_0^z x \cdot \tan'(x)\, dx = [x \cdot \tan(x)]_0^z - \int_0^z \tan(x)\, dx$$

$$= \arctan(y) \cdot y + \ln(\cos(z)) = y \cdot \arctan(y) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \int \arctan(x)\,dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Aufgabe G9 (Verbesserte Integralabschätzung)

Aus der Vorlesung wissen wir: Sind $a \leq b$ reelle Zahlen und $f \in R_a^b$, so gilt

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Seien jetzt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b$ und $f \in R_b^a$. Zeigen Sie

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|.$$

Lösung:

Es gilt $\left|\int_a^b f\right| = \left|-\int_b^a f\right| = \left|\int_b^a f\right| \leq \int_b^a |f| = \left|\int_b^a |f|\right|$

$= \left|\int_a^b |f|\right|$