Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
02.05.2014

4. Übungsblatt zur „Analysis II"

Gruppenübungen

Aufgabe G10 (Intergrale rationaler Funktionen)
Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, mit $p^2 - 4q < 0$. Zeigen Sie

(a)

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + const.$$

(b)

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \frac{a}{2}\ln(|x^2+px+q|) + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \cdot \int \frac{1}{x^2+px+q} dx + const.$$

Lösung:

(a) $$\frac{d}{dx} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(2x+p)^2}{4q-p^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} = \frac{4}{4q-p^2} \cdot \frac{4q-p^2}{4q-p^2+(2x+p)^2}$$

$$= \frac{4}{4q-p^2+4x^2+4xp+p^2} = \frac{1}{x^2+xp+q}$$

(b) Wir betrachten die Gleichung auf einem Intervall, auf dem $x^2+px+q > 0$ gilt. (Im anderen Fall analog

$$\frac{d}{dx}(\text{rechte Seite}) = \frac{a}{2} \frac{1}{x^2+px+q}(2x+p) + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{ax + \frac{ap}{2} + b - \frac{ap}{2}}{x^2+px+q} = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

Aufgabe G11 (Partialbruchzerlegung)

Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \int_4^5 \frac{1}{x^2-5x+6} \qquad \text{(b)} \int \frac{13x+14}{x^3+x^2-2x+12}\,.$$

Lösung:

(a) Es gilt $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-2}=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$\Rightarrow ax-2a+bx-3b=1$

$\Rightarrow a=-b$ und $-2a-3b=1$

Also $-2a+3a=1 \Rightarrow a=1,\ b=-1$

$$\Rightarrow \int_4^5 \frac{1}{x^2-5x+6} = \int_4^5 \frac{1}{x-3}\,dx - \int_4^5 \frac{1}{x-2}\,dx = 2\ln(2)-\ln(3)$$

(b) Es gilt $x^3-x^2-8x+12=(x+3)(x-2)^2$.

Der Ansatz

$$\frac{13x+14}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}$$

führt auf $a=-1,\ b=1,\ c=4$.

$$\Rightarrow \int \frac{13x+14}{x^3-x^2-8x+12}\,dx = -\int\frac{1}{x+3} + \int\frac{1}{x-2}\,dx + 4\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= -\ln(x+3)+\ln(x-2)-\frac{8}{x-2} + \text{const.}$$

Aufgabe G12 (Taylor-Formel)

Finden Sie ein Polynon dritten Grades, dass den Tangens auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}]$ mit einem Fehler kleiner 0,003 approximiert.

Hinweis: Es gilt $\tan(\frac{\pi}{16}) \leq \frac{1}{5}$.

Lösung:

Sei $\gamma(t) := \tan(t)$.

Es gilt $\gamma'(t) = 1 + \tan^2(t)$, $\gamma''(t) = 2\tan(t) + 2\tan^3(t)$,

$\gamma'''(t) = 2 + 8\tan^2(t) + 6\tan^4(t)$

$\gamma^{(4)}(t) = 16\tan(t) + 40\tan^3(t) + 24\tan^5(t)$

Es gilt $\gamma(t) = t + \frac{2}{3!} \cdot t^3 + r_3(t)$ auf $[-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}]$

und $|r_3(t)| = \left|\frac{t^4}{4!} \gamma^{(4)}(\tau)\right|$ für ein $\tau \in [-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}]$

Mit $\tan(\frac{\pi}{16}) \leq \frac{1}{5}$ erhalten wir

$$|r_3(t)| \leq \Big(\underbrace{\frac{\pi}{16}}_{\leq \frac{1}{4}}\Big)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{80}{5} \leq \frac{1}{384} \leq 0{,}003 .$$