Prof. Dr. Helge Glöckner Sommersemester 2014

09.05.2014

5. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G13 (Uneigentliche Integrale)

Bestimmen Sie welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

$$\text{(a) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \text{(b) } \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx \quad \text{(c) } \int_0^\infty \frac{x-1}{x+1}dx \quad \text{(d) } \int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$$

Lösung:

(a) Sei $\alpha \in]0,1[$. Es gilt $\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_\alpha^1 = 2 - 2\sqrt{\alpha}$. Also $\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$.

(b) Es gilt $\int_0^1 \left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$. Also ist das Integral absolut konvergent.

(c) Es gibt ein $\alpha > 0$, sodass $\frac{x-1}{x+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ für alle $x \geq \alpha$. Es reicht zu zeigen, dass das Integral $\int_\alpha^\infty \frac{x-1}{x+1}dx$ nicht konvergiert. Es gilt $\int_\alpha^\infty \frac{x-1}{x+1}dx \geq \int_\alpha^\infty \frac{1}{2} = \infty$.

(d) Es reicht aus die Existenz von $\int_1^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$ zu zeigen. Es gilt $e^x \geq \frac{1}{3!}x^3$. Wir folgern

$$\int_1^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx \leq \int_1^\infty \frac{x}{e^x}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{3!}\frac{1}{x^2} < \infty.$$

Aufgabe G14 (Ein paar stetige Funktionen)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Abbildungen

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildungen f_n stetig sind.

Lösung: Es reicht $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$ zu zeigen. Dazu rechnen wir für $x > 0$:

$$e^{\frac{1}{x}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{x}\right)^k \geq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{x^{n+1}}$$

Wir erhalten

$$f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{1}{x}}} \leq \frac{x^n}{\frac{1}{x^{n+1}}} = x.$$

Aufgabe G15 (Differenzierbarkeit)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ eine C^1-Abbildung. Zudem sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass f eine C^1-Abbildung ist und $f' = g$ gilt.

Lösung: Sei $x_n \to 0$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$. Wir zeigen $\frac{1}{x_n} \cdot (f(x_n) - f(0)) \to g(0)$. Nach dem Mittelwertsatz finden wir für $n \in \mathbb{N}$ ein $\zeta_n \in]0, x_n[$ mit $\frac{1}{x_n} \cdot (f(x_n) - f(0)) = f'(\zeta_n) = g(z_n)$ (beachte, dass f stetig ist). Diese Gleichung gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ und g stetig ist, gilt $\frac{1}{x_n} \cdot (f(x_n) - f(0)) \to g(0)$.