Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
16.05.2014

# 6. Übungsblatt zur „Analysis II“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G16** (Punktweise vs. gleichmäßige Konvergenz)

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}\ x\mapsto \begin{cases} 2\cdot(x-n) & : x\in[n, n+\frac{1}{2}] \\ 1-2\cdot(x-(n+\frac{1}{2})) & : x\in[n+\frac{1}{2}, n+1] \\ 0 & : \text{sonst}\ . \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie $f_n$. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion? Wenn ja, gegen welche?

(b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

Wir betrachten die Funktionen Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$g_n\colon [0,1]\to \mathbb{R}\ x\mapsto \begin{cases} 2n^2x & : x\in[0, \frac{1}{2n}] \\ n-2n^2(x-\frac{1}{2n}) & : x\in[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \text{sonst}\ . \end{cases}$$

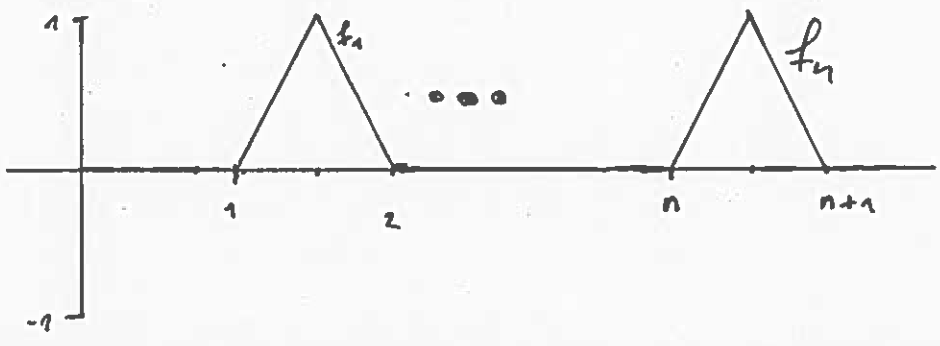
(c) Skizzieren Sie $g_n$. Zeigen Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

(d) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n \neq 0$.

(e) Folgern Sie aus (d), dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

**Lösung:**

(a)



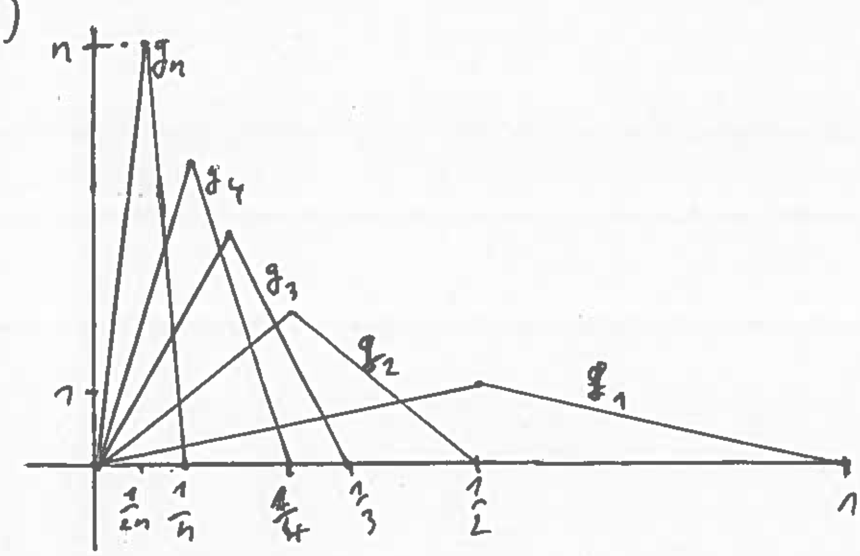

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
Sei hierzu $x\in[0,\infty[$. Es gibt $N\in\mathbb{N}$ mit $x\le N$. Also $f_n(x)=0\ \forall\, n\ge N$.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$

(b) Nein $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. nicht gleichmäßig.

Für $n\in\mathbb{N}$ gilt $f_n(n+\frac{1}{2})=1$

$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \geq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

(c)




Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(0)=0$. Sei nun $x\in\,]0,1]$. Es gibt $N\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{N}\leq x$. Für alle $n\geq N$ gilt $g_n(x)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0$.

(d) Sei $n\in\mathbb{N}$. Es gilt $\int_0^1 g_n = 2\int_0^{\frac{1}{2n}} 2n^2 x\,dx$

$= 2n^2\left[x^2\right]_0^{1/2n} = \frac{1}{2}$.

(e) Würde $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. konvergieren, so müsste

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g_n\,dx = 0$ gelten.

**Aufgabe G17** (Funktionenreihen)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ stetig ist.

**Lösung:**

Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sind stetig. Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. glm.

Da $\sum_{n=1}^{\cancel{N}} f_n$ stet. ist, muss auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stetig sein.

**Aufgabe G18** (Gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $f$ gleichmäßig stetig ist.

**Lösung:** Sei $\varepsilon > 0$.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\| \leq \varepsilon/3$.

Da $f_N$ glm. stetig finden wir $\delta > 0$ mit

$x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$.

Es gilt $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f(y)|$

$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.