Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
23.05.2014

7. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G19 (Potenzreihen)

(a) Wir definieren $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Zeigen Sie durch gliedweises Ableiten von f, dass $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Seien $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{n_k}$ genau dann, wenn die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ mit

$$b_n = \begin{cases} a_k & : n = n_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

konvergiert. Sei R Konvergenzradius der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$. Es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_k}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon]-R, R[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{n_k}$$

differenzierbar ist und $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_{n_k} x^{n_k - 1}$ für $x \in]-R, R[$ gilt.

(c) Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

Zeigen Sie $f'(x) = e^{x^2}$.

Lösung:

(a) Es gilt $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$

(b) $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{n_k} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot b_n x^{n-1}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_k x^{n_k - 1}$

(c) Mit (b) erhalten wir $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+1} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$

$= e^{(x^2)}$

Aufgabe G20 (Eine weitere Norm auf $\mathbb{R}^n$)

Zeigen Sie, dass $\|\bullet\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty[, x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung:

Offensichtlich gilt $\|0\|_1 = 0$.

Sei $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|$$

Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| \, |x_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Aufgabe G21 (Der Rand von $\mathbb{Q}$)

Sei $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik.

(a) Zeigen Sie, dass für X gilt $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ zeigen Sie $[a,b]^\circ =]a,b[$ und $\overline{]a,b[} = [a,b]$.

Lösung:

(a) $\partial\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ klar. Sei $x \in \mathbb{R}$. Ist $U \subseteq \mathbb{R}$ eine x-Umg. so enthält U sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Also schneidet U sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Da U beliebig war folgt $x \in \partial\mathbb{Q}$.

(b) $]a,b[$ ist eine offene Menge in $\mathbb{R}$ und in $[a,b]$ enthalten. Also gilt $[a,b]^\circ \supseteq]a,b[$.
Da $[a,b]^\circ \subseteq [a,b]$ reicht es zu zeigen $a, b \notin [a,b]^\circ$.
Jede Umg. von b schneidet $\mathbb{R} \setminus [a,b]$.
Also gilt $b \notin [a,b]^\circ$.
Analog erhält man $a \notin [a,b]^\circ$.