8. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G22 (Das Innere und der Rand von Kugeln)

(a) Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass M genau dann abgeschlossen ist, wenn $M = \overline{M}$. Zeigen Sie zudem, dass M genau dann offen ist, wenn $M = M^\circ$.

(b) Sei $(E, \|\bullet\|)$ ein normierter Raum, zeigen Sie $\overline{B}_r(0)^\circ = B_r(0)$ und $\partial B_r(0) = \partial \overline{B}_r(0) = \{x \in E : \|x\| = r\}$.

Lösung:

(a) Sei M abgeschlossen, dann ist M die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X die M enthält, also gilt $M = \overline{M}$. Sei umgekehrt $M = \overline{M}$, dann ist offensichtlich M abgeschlossen.
Analog zeigt man, dass M genau dann offen ist, wenn $M = M^\circ$.

(b) $B_r(0)$ ist offen und in $\overline{B}_r(0)$ enthalten, also $B_r(0) \subseteq \overline{B}_r(0)^\circ$.
Sei nun $x \in \overline{B}_r(0)^\circ$ und o.B.d.A. sei $x \neq 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}_\varepsilon(x) \subseteq \overline{B}_r(0)$. Wir definieren $\delta := \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ und erhalten $\|(1+\delta)x - x\| = \|\delta x\| = \varepsilon$. Also gilt $(1+\delta)x \in \overline{B}_\varepsilon(x) \subseteq \overline{B}_r(0)$. Nehmen wir an es gilt $\|x\| = r$, dann erhalten wir

$$r \geq \|(1+\delta)x\| = (1+\delta)\|x\|.$$

Dies ist ein Widerspruch.
Da $B_r(0)$ offen ist erhalten wir $B_r(0) = (B_r(0))^*$ und da $\overline{B}_r(0)$ abgeschlossen ist erhalten wir $\overline{B_r(0)} = \overline{B}_r(0) = \overline{(\overline{B}_r(0))}$ (sieh auch Vorlesung für $\overline{B_r(0)} = \overline{B}_r(0)$). Also gilt

$$\partial B_r(0) = \overline{B_r(0)} \setminus (B_r(0))^\circ = \overline{(\overline{B}_r(0))} \setminus B_r(0) = \overline{(\overline{B}_r(0))} \setminus (\overline{B}_r(0))^\circ = \partial \overline{B}_r(0) \text{ und}$$
$$\partial B_r(0) = \overline{B}_r(0) \setminus B_r(0) = \{x \in E : \|x\| = r\}$$

Aufgabe G23 (Stetige Fortsetzung)

(a) Zeigen Sie, dass $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto e^y \cdot \sin(x)$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $g \colon (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{\sin(|x|)}{\|(x,y)\|_1}$ stetig ist.

(c) Gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$g_\lambda \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(|x|)}{\|(x,y)\|_1} : & (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda : & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist?

Lösung:

(a) Die Multiplikation $m\colon \mathbb{R}^2 \to R$ ist stetig, die Abbildung $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (e^y, \sin(x))$ ist stetig, da sie komponentenweise stetig ist. Also ist $f = m \circ h$ stetig.

(b) Die Abbildung $\tilde{g}_{(1)}\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(|\operatorname{pr}_1(x, y)|)$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen also ist $g_{(1)} := \tilde{g}_{(1)}|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}}$ stetig. Die Abbildung $g_{(2)}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\,(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = |\operatorname{pr}_1(x, y)| + |\operatorname{pr}_2(x, y)|$ ist als Einschränkung und co-Einschränkung einer Stetigen Abbildung stetig (wir wissen, dass der Betrag auf $\mathbb{R}$ stetig ist und dass die Addition von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist).

(c) Nein g_λ ist für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g_\lambda(x_n, n \cdot x_n) &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\sin(|x_n|)}{|x_n|} \to 0 \cdot 1 = 0 \text{ aber} \\ g_\lambda(x_n, 0) &= \frac{\sin(|x_n|)}{|x_n|} \to 1. \end{aligned}$$

Aufgabe G24 (Abgeschlossenheit und Vollständigkeit)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, sodass der metrische Raum $(A, d|_{A\times A})$ vollständig ist. Zeigen Sie, dass A eine abgeschlossene Teilmenge in X ist.

Lösung: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X mit $x_n \in A$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (X, d). Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in $(A, d_{A\times A})$. Da A vollständig ist gibt es ein $y \in A$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ in A. Also gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ in X. Wir folgern $x = y$. Folglich gilt $x \in A$.