Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
06.06.2014

9. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G~~1~~ G5 (Ein Integraloperator)

Wir statten $C[0,1]$ mit der Supremumsnorm aus und betrachten die Abbildung

$$I\colon C[0,1] \to C[0,1],\ \gamma \mapsto I(\gamma)$$

mit $I(\gamma)(x) = \int_0^x \gamma(t)dt$. Zeigen Sie, dass I stetig linear ist und berechnen Sie $\|I\|_{op}$.

Lösung:

Sei $f \in C[0,1]$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$.

$\Rightarrow \|I(f)\|_\infty \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1$

$\Rightarrow \|I\|_{op} \leq 1$.

Es gilt aber für $g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ $\|g\|_\infty \leq 1$ und

$\|I(g)\|_\infty = \int_0^1 1dt = 1$

$\Rightarrow \|I\|_{op} = 1$

Aufgabe G~~2~~ 26 (Die Punktauswertung)

Wir statten $C[0,1]$ mit der Supremumsnorm aus. Zeigen Sie, dass für jedes $t \in [0,1]$ die Punktauswertung

$$\varepsilon_t \colon C[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto f(t)$$

eine stetige lineare Abbildung mit $\|\varepsilon\|_{op} = 1$ ist.

Lösung:

Sei $f \in C[0,1]$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow |\varepsilon_t(f)| \leq 1$

$\Rightarrow \|\varepsilon_t\|_{op} \leq 1.$

Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1$.

$\Rightarrow \|g\|_\infty \leq 1$ und $|\varepsilon_t(g)| = 1$

$\Rightarrow \|\varepsilon_t\|_{op} = 1.$

Aufgabe G8 27 (Die richtige Norm auf $C^1[0,1]$)

(a) Wir definieren

$$\|\bullet\|_{C^1} : C^1[0,1] \to [0,\infty[,\ \gamma \mapsto \max\{\|\gamma\|_\infty, \|\gamma'\|_\infty\}.$$

Zeigen Sie, dass $(C^1[0,1], \|\bullet\|_{C^1})$ ein Banachraum ist.
Hinweis: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und ist $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g, und konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geichmäßig gegen f, dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(C^1[0,1], \|\bullet\|_{C^1}) \to (C[0,1], \|\bullet\|_\infty),\ \gamma \mapsto \gamma'$$

stetig ist.

Lösung:

(a) • Offensichtlich ist $\|.\|_{C^1}$ eine Norm.

• Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C^1[0,1], \|\bullet\|_{C^1})$.
Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|.\|_\infty)$.

$\Rightarrow \exists\, g \in C[0,1]$ und $f \in C^1[0,1]$ mit

$f_n' \to g$ glm und $f_n \to f$ glm

und $g = f'$.

$\Rightarrow f_n \to f$ glm. bzgl. $\|.\|_\infty$.

(b) Sei $f \in C^1[0,1]$ mit $\|f\|_{C^1} \le 1$

$\Rightarrow \|f'\|_\infty \le 1$

$\Rightarrow$ Die Abb. ist stetig.