Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
13.06.2014

10. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G28 (Normen auf dem $\mathbb{R}^n$)

Auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir die Normen $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ und $\|\bullet\|_\infty$ eingeführt. Zeigen Sie

(a) $\|\bullet\|_\infty \leq \|\bullet\|_1 \leq n \cdot \|\bullet\|_\infty$

(b) $\|\bullet\|_\infty \leq \|\bullet\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\bullet\|_\infty$.

Lösung:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

$\Rightarrow \|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$

Zudem gilt

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_{i_0}| = n\,|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$

Wir zeigen $\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2$.

Es gilt $\|x\|_\infty^2 = |x_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|^2$

Also gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

Wir zeigen $\|x\|_2^2 \leq n\,\|x\|_\infty^2$

Es gilt $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_{i_0}|^2 = n\,\|x\|_\infty$

$\square$

Aufgabe G29 (Kompakte Intervalle)

(a) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen, Sie: Wenn D kompakt ist, so gilt $D = [a, b]$ für gewisse $a, b \in D$.

(b) Geben Sie eine offene Überdeckung von $]0, 1[$ an, die keine endliche Teilüberdeckung hat.

Lösung:

(a) Wenn D kompakt ist, so muss D eine abg. Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein. Wir wissen bereits, dass die Intervalle $D \subseteq \mathbb{R}$, die abgeschlossen sind, die Form $[a, b]$ für gewisse $a, b \in D$ haben.

(b) Die Mengen $U_n :=]\frac{1}{n}, 1[$ für $n \in \mathbb{N}$ sind offene Teilmengen von $]0, 1[$. Zudem bilden sie eine offene Überdeckung von $]0, 1[$.

Angenommen es gäbe eine endliche Teilüberdeckung $(U_i)_{i \in F}$ mit $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{N}$ und $\#F < \infty$.

Sei $N := \max F$. Dann $\bigcup_{i \in F} U_i =]\frac{1}{N}, 1[$.

Dies ist ein Widerspruch, da $\frac{1}{N} \neq 0$.

Aufgabe G30 (Die endliche Durchschnittseigenschaft)

Sei X ein hausdorffscher topologischer Raum. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) X ist kompakt.

(b) Ist $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit $J \neq \emptyset$ und $\bigcap_{j\in F} A_j \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $F \subseteq J$, so ist $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$.

Lösung:

(a) ~~(b)~~ Sei X kompakt und $(A_j)_{j\in J}$ wie in der Aufgabe.

Wir zeigen $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$.

Angenommen $\bigcap_{j\in J} A_j = \emptyset$. Wir definieren

$U_j := X \setminus A_j$ für $j \in J$.

Die Mengen U_j sind offen und

$$\bigcup_{j\in J} U_j = \bigcup_{j\in J} X\setminus A_j = X \setminus \bigcap_{j\in J} A_j = X.$$

Da X kp. $\Rightarrow \exists\, F \subseteq J$ endl. mit

$$X = \bigcup_{j\in F} U_j = \bigcup_{j\in F} X\setminus A_j = X \setminus \bigcap_{j\in F} A_j$$

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in F} A_j = \emptyset \quad \lightning.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Es gelte (b) und $(U_j)_{j\in J}$ sei eine offene Überdeckung von X. Denn $J \neq \emptyset$.

Wir definieren $A_j := X \setminus U_j$ für $j \in J$.

Angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{j\in F}$ mit $F \subseteq J$, $\#F < \infty$. Dann gilt

$\bigcap_{j\in F} A_j = X \setminus \bigcup_{j\in F} U_j \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $F \subseteq J$.

$$\overset{(b)}{\Rightarrow} \emptyset \neq \bigcap_{j\in J} A_j = X \setminus \bigcup_{j\in J} U_j \quad \lightning.$$