Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
20.06.2014

11. Übungsblatt zur „Analysis II“

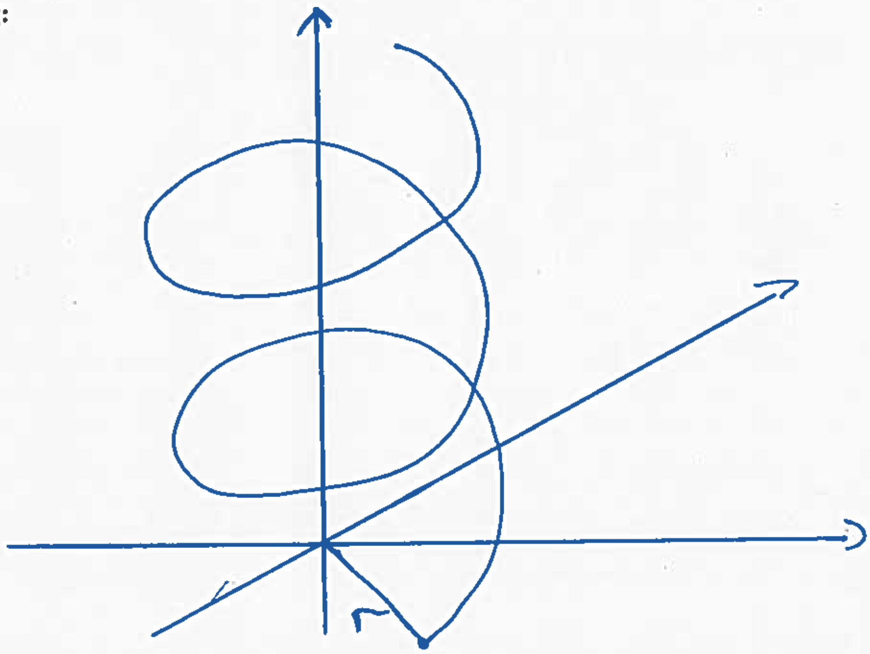
Gruppenübungen

Aufgabe G31 (Die Bogenlänge)
Seien $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $r > 0$. Wir definieren

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t), c \cdot t).$$

Skizzieren Sie γ und berechnen Sie $\gamma'(t)$, $\|\gamma'(t)\|_2$ und $L(\gamma)$.

Lösung:



Es gilt $\gamma'(t) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t), c)$, $\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{r^2+c^2}$

$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt = \sqrt{r^2+c^2}\,(b-a)$

Aufgabe G32 (Die Zykloide)

Wir definieren

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

Die Kurve γ ist die Bahn eines Punktes auf einem Kreis, der auf der x-Achse abrollt. Bestimmen Sie $\gamma'(t)$, $\|\gamma'(t)\|_2$ und $L(\gamma|_{[0,2\pi]})$.

Hinweis: Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $1 - \cos(t) = 2\sin^2(\frac{t}{2})$.

Lösung:

Es gilt $\gamma'(t) = (1 + \cos(t), \sin(t))$.

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)}$

$= \sqrt{2(1 - \cos(t))} = 2\sqrt{\sin^2(\frac{t}{2})} = 2|\sin(\frac{t}{2})|$

Für $t \in [0, \pi]$ gilt $\sin(t) \geq 0$

$\Rightarrow L(\gamma|_{[0,2\pi]}) = 2\int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2})\,dt = 4\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt$

$= 4 \cdot [-\cos]_0^{\pi} = 8.$

Aufgabe G33 (Ein Kurvenintegral)

Wir statten den $\mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Norm aus und betrachten die Kurve $\gamma\colon [0,1[\to \mathbb{R}^3, t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t), t)$ sowie die Funktion

$$f\colon B_2^{\mathbb{R}^3}(0) \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)^2}}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f$. **Lösung:**

Es gilt $\gamma'(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1)$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{\cos^2(t) - 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\cos^2(t) + 1}$$

$$= \sqrt{2+t^2}.$$

Also $f \circ \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{4-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt = \left[\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{t=0}^{1}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$