Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
27.06.2014

12. Übungsblatt zur „Analysis II"

Gruppenübungen

Aufgabe G34 (Partielle Ableitungen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig partiell differenzierbar sind und berechnen Sie ihre partiellen Ableitungen.

(a) $f\colon \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\neq 0\}\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto \frac{xy}{z}$
(b) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ x\mapsto(\cos(x),\sin(x))$
(c) $h\colon \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x+\sqrt{y},\sqrt{x}+y)$
(d) $i\colon \mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(1+\ln(z), x\sqrt{y}+\sqrt{z})$

Lösung:

(a) Es gilt $D_1 f(x,y,z) = \frac{y}{z}$, $D_2 f(x,y,z) = \frac{x}{z}$, $D_3 f(x,y,z) = -\frac{xy}{z^2}$. Die part. Ableitungen sind jeweils stetig.

(b) $D_1 g(x) = g'(x) = (-\sin(x), \cos(x))$ stetig.

(c) $D_1 h(x,y) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$, $D_2 h(x,y) = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}, 1\right)$.
Diese sind stetig.

(d) $D_1 i(x,y,z) = (0, \sqrt{y})$ $D_2 i(x,y,z) = \left(0, \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$
$D_3 i(x,y,z) = \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$
Diese sind stetig.

Aufgabe G35 (Differenzieren unter dem Integralzeichen)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x\cos(x)dx$$

ohne partielle Integration zu verwenden. Nutzen Sie stattdessen $x\cos(x) = \frac{d}{dt}|_{t=1}\sin(tx)$.

Lösung:

Es gilt $\int_0^1 x\cos(x)dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} \sin(tx)\, dx$

$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} \int_0^1 \sin(tx)\, dx = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} \left[-\frac{\cos(tx)}{t}\right]_0^1$

$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} \frac{-\cos(t)+\cos(0)}{t}$

$= -1 - \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} \frac{\cos(t)}{t}$

$= -1 - \left(\frac{-\sin(t)}{t} + \cos(t)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{t=1}$

$= -1 + \sin(1) + \cos(1)$

Aufgabe G36 (Lokales Maximum)

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $p \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen p ein lokales Maximum von f, wenn es eine p-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $f|_U \leq f(p)$ gilt. Sei nun p ein lokales Minimum von f. Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen von f in p verschwinden.

Lösung:

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir betrachten die Abb.

$\tilde{f}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(p + t \cdot e_i)$.

Da f in p ein lokales Maximum hat, hat auch $\tilde{f}_i$ ein lokales Maximum in 0.

Es gilt also $0 = \tilde{f}_i{}'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.