Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
04.07.2014

13. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G37 (Verallgemeinerter Satz von Schwarz)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Seien zudem σ eine Permutation der Menge $\{1, \ldots, k\}$ und $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie

$$D_{j_1} \ldots D_{j_k} f = D_{j_{\sigma(1)}} \ldots D_{j_{\sigma(k)}} f.$$

Lösung:

Jede Permutation lässt sich als Produkt von Nachbartranspositionen schreiben.
Wir können also oBdA $\sigma = (i, i+1)$ annehmen.
Wir setzen $g := D_{j_{i+2}} \text{—} D_{j_k} f$.
Es gilt $D_{j_i} D_{j_{i+1}} g = D_{j_{i+1}} D_{j_i} g$.
Es folgt die Aussage.

Aufgabe G38 (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - y^3 + 3axy$ für $a \neq 0$.

Lösung:

(a) $0 = \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^3 - y^3 - z^3/(x^2yz) \\ 2y^3 - x^3 - z^3/(xy^2z) \\ 2z^3 - x^3 - y^3/(xyz^2) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2x^3 - y^3 - z^3 = 2y^3 - x^3 - z^3 = 2z^3 - x^3 - y^3$

$\Leftrightarrow 3(x^3 - z^3) = 3(y^3 - z^3) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

Es gilt $f(\lambda x, \lambda x, \lambda x) = \lambda^3 3$

für λ nahe 1 mit $\lambda > 1$ ist $f(\lambda x, \lambda x, \lambda x) > f(x,x,x)$

— " — $\lambda < 1$ ist $f(\lambda x, \lambda x, \lambda x) < f(x,x,x)$

Also hat f keine Extrema.

(b) Es gilt $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3ay \\ -3y^2 + 3ax \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -ay,\ y^2 = ax \Leftrightarrow x^4 = a^2y^2 = a^3x,\ y^2 = ax$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0),\ (a,-a)$.

Wir erhalten $H_{(0,0)}g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Und $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt in $(0,0)$.

In $(a,-a)$: $H_{(a,-a)}g = \begin{pmatrix} 6a & 3a \\ 3a & 6a \end{pmatrix}$. Es gilt

$\det H_{(a,-a)}(g) = 25a^2 > 0$. Also: $a > 0 \Rightarrow$ lokales Min.

$a < 0 \Rightarrow$ kein lokales Extremum.

Aufgabe G39 (Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit; 5 Punkte)
Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig und partiell differenzierbar, aber in $(0,0)$ nicht total differenzierbar ist.

Lösung:
Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger und partiell differenzierbarer Funktionen stetig und partiell diff'bar.

Stetigkeit in $(0,0)$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y|$$

Partielle Differenzierbarkeit in $(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

Also folgt $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$.
Wäre f in $(0,0)$ total diff'bar, so hätten wir $D_v f(0,0) = 0$ mit $v = (1,1)$. Wir erhalten aber

$$\frac{f(hv)-f(0,0)}{h} = \frac{f(h,h)}{h} = \frac{h^3}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = 1$$