Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
11.07.2014

14. Übungsblatt zur „Analysis II“

Gruppenübungen

Aufgabe G40 (Richtungsableitungen)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Richtungsableitungen $D_v f_i(p)$ im Punkte $p = (0,0)$ in Richtung $v = (2,1)$.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto -\frac{x^2+y^2}{4}$

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (\sin(x), \cos(y))$.

Lösung:

(a) $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{2}$

$\Rightarrow D_v f_1(p) = 2 \cdot \left(-\frac{0}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{0}{2}\right) = 0$

(b) $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = (\cos(x), 0)$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = (0, -\sin(y))$

$\Rightarrow D_v f_2(p) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe G41 (Satz über die Umkehrfunktion)

Gegeben sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + z \\ 2y^5 - 3z \\ z^3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es eine $(1,1,1)$-Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $f(U)$ offen in $\mathbb{R}^3$ und $f\colon U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie die Ableitung von $(f|_U^{f(U)})^{-1}$ im Punkt $(2,-1,2)$.

Lösung:

wir erhalten

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 & 1 \\ 0 & 10y^4 & -3 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

Und $f'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Da $f'(1,1,1)$ invertierbar ist folgt mit dem Satz über die Umkehrfunktion, dass es eine $(1,1,1)$-Umg. $U \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ist und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Für $(x,y,z) \in f(U)$ gilt $(f^{-1})'(x,y,z) = f'(f^{-1}(x,y,z))^{-1}$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(2,-1,2) = (f'(1,1,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe G42 (Satz über implizite Funktion)
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^4 + 3x\cos(y) + \sin(z) + z = 0$$

für hinreichend kleine x, y und z lokal nach z aufgelöst werden kann.
Lösung:

Wir betrachten $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^4 + 3x\cos(y) + \sin(z) + z$.

Es gilt $d_2 f((x,y), z) = \cos(z) + 1$

$\Rightarrow d_2 f((0,0),0) \in GL(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ Wir finden 0-Umg. $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}$ und eine glatte Abb. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0,0) = 0$ und $\{(x,y,z) \in U \times V : f(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x, \varphi(x)) \mid x \in U\}$.

Aufgabe G43 (Freiwillige Ferienaufgabe I)

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy,$$

auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. **Lösung:**

Sei $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2-1$

Wir haben die notwendigen Bed.:

$h(p)=0$, $D_1(f-\lambda h)(p)=0$, $D_2(f-\lambda h)(p)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 & (I) \\ y-\lambda 2x=0 & (II) \\ x-\lambda 2y=0 & (III) \end{cases}$$

$$\underset{(III)}{\Rightarrow} x = 2\lambda y \underset{(II)}{\Rightarrow} y-4\lambda^2 y=0 \Rightarrow y(1-4\lambda^2)=0$$

1 Fall: $y=0 \underset{(I)}{\Rightarrow} x=0$

2. Fall $\lambda^2 = \frac{1}{4}$

2.1: $\lambda = \frac{1}{2} \underset{II}{\Rightarrow} x=y \underset{(I)}{\Rightarrow} x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2.1: $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x=-y \underset{(I)}{\Rightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Da S_1 kp. und f stetig muss f ein globales Maximum und ein globales Minimum auf S_1 annehmen. Diese sind dann aber auch lokale

Mit $f(0,0)=0$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2}$ erhalten wir, dass in $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ die globalen Maxima vorliegen und in $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ die globalen Minima vorliegen.

Aufgabe G44 (Freiwillige Ferienaufgabe II)
Hat das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2, 2xy+z, 2xz+y)$$

ein Potential? Wenn ja, können Sie dieses angeben? **Lösung:**

Es gilt $D_2 f_3 = D_3 f_2 = 1$

$D_1 f_3(x,y,z) = D_3 f_2(x,y,z) = 2z$

$D_1 f_2(x,y,z) = D_2 f_1(x,y,z) = 2y$

Da $\mathbb{R}^3$ konvex hat f ein Potential φ.

Der Ansatz

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + xz^2 + g_1(y,z)$$

$$= xy^2 + yz + g_2(x,z)$$

$$= xz^2 + yz + g_3(x,y)$$

mit unbestimmten Fkt. g_i. führt auf das Potential

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + yz + x(y^2+z^2).$$