Prof. Dr. Helge Glöckner

Sommersemester 2014
11.04.2014

1. Übungsblatt zur „Analysis II“

Hausübungen

Aufgabe H1 (n-te Wurzeln aus komplexen Zahlen; 5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzt. Diese sind gegeben durch

$$\left\{ e^{\frac{k}{n}2\pi i} : k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

Zeigen Sie nun, dass es für $w = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ genau n verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = w$ in $\mathbb{C}$ gibt und diese durch

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{k}{n}2\pi i} : k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

gegeben sind.

Lösung:

1. Für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt $\left(\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{k}{n}2\pi i}\right)^n = re^{i\varphi} = w.$
   Also sind die angegebenen Zahlen n-te Wurzeln aus w.

2. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$.
   Mit $w \neq 0$ erhalten wir $\frac{z^n}{w} = 1.$

$$\Rightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}}\right)^n = 1$$

Also ist $\frac{z}{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\varphi/n}}$ eine n-te Einheitswurzel

$$\Rightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}} = e^{\frac{k}{n}2\pi i} \quad \text{für ein } k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{k}{n}2\pi i}$$

Aufgabe H2 (Die Umkehrfunktionen; 5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ streng monoton wachsend und bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\operatorname{artanh} := \tanh^{-1}\colon]-1,1[\to \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Wir benutzen G3 und erhalten mit $\cosh(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Also ist tanh streng monoton wachsend.

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to \frac{1}{1} = 1$

Mit $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ erhalten wir

$\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$.

Mit dem Zwischenwertsatz und der Stetigkeit von tanh erhalten wir $\tanh(\mathbb{R}) =]-1,1[$.

$\Rightarrow \tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ ist bijektiv.

Sei nun $x \in]-1,1[$. Wir setzen $y := \tanh(x)$ und erhalten $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(y)} \underset{(*)}{=} \frac{1}{1-\tanh^2(y)} = \frac{1}{1-x^2}$.

Wobei wir für $(*)$ $\tanh'(y) = \frac{1}{\cosh^2(y)} = 1 - \tanh^2(y)$ verwendet haben.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\sinh(x) = y$. Wir schreiben $z := e^x$ und erhalten

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff (e^x)^2 - 1 = 2e^x y$$

$$\iff z^2 - 2zy + y^2 - y^2 - 1 = 0 \iff (z-y)^2 = y^2 + 1$$

$$\iff z - y = \sqrt{y^2+1} \text{ oder } z - y = -\sqrt{y^2+1}$$

Es gilt aber $-\sqrt{y^2+1} + y < 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $z = e^x > 0$.

Also $\sinh(x) = y \iff e^x = \sqrt{y^2+1} + y$

$\iff x = \ln(\sqrt{y^2+1} + y)$.

Folglich $\operatorname{arsinh}(y) = \ln(\sqrt{y^2+1} + y)$

Aufgabe H3 (Grenzwerte; 5 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim_{x \nearrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Lösung:

(a) Wir betrachten die Abbildung $\arcsin :]-1,1[\to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Für $y \in]-1,1[$ und $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mit $\sin(x) = y$ rechnen wi

$$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Mit l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{\pi/2 - \arcsin(x)}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{-2\sqrt{1-x} \cdot (-1)}{-\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{li}$$

$$= -\lim_{x \nearrow 1} \frac{2}{\sqrt{1+x}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

(b) Wir rechnen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1}{1} = 1.$$